Variationskalkül

"Variationskalkül," *Enzyklopädie der Neuzeit* Bd. 15. Eds. Friedrich Jaeger and Horst Carl (Metzler Verlag: Stuttgart 2012), pp. 872-874

1. Ursprung

Der V. in seiner einfachsten Form bezweckte ursprünglich, eine Funktion zu finden, die den Wert eines gegebenen bestimmten Integrals zu einem Minimum oder Maximum macht. Der Name V. wurde im 18. Jh. von Leonhard Euler im Anschluss an Joseph Louis de Lagrange vorgeschlagen und verweist auf das Verfahren, die gesuchte Funktion durch die Extremalbedingungen so zu identifizieren, dass sich bei geringfügiger Variation der Funktion der Wert des Integrals nur minimal ändert. Als ein für sich bestehendes Teilgebiet der ↗Mathematik geht der V. auf eine von Johann Bernoulli 1696 formulierte Aufgabenstellung zurück, die Kurve der kürzesten Fallzeit zwischen zwei gegebenen Punkten, die sog. Brachystochrone, zu finden [5. Kap. 1]. Eine verwandte Fragestellung war das sog. isoperimetrische Problem, also die Bestimmung derjenigen Kurve von gegebener Länge, die die größte Fläche umschließt.

Diese und andere Probleme, bei denen eine Kurve mit Minimal- oder Maximaleigenschaft gesucht wurde, konnten mit der Methode der neu entwickelten Differentialrechnung gelöst werden (↗Differentialkalkül). So zeigten mehrere Forscher des 17. Jh.s, dass die Lösung des Brachystochronenproblems ein Bogen einer Zykloide, die Lösung des isoperimetrischen Problems ein Kreis ist. Daraus entwickelte sich der V. zu einem wichtigen Gebiet der ↗Analysis mit eigenen Begriffen, Lösungsverfahren und charakteristischen Problemstellungen; insbes. in der theoretischen ↗Mechanik und ↗Optik zeigten sich seine Stärken.

2. Entwicklung

Den von Johann und Jakob Bernoulli entwickelten Lösungsansatz griff Leonhard Euler 1744 auf und formte daraus eine kohärente und umfassende math. Theorie. Durch die innovative Verwendung des Funktionenkonzepts gelangte er zu einem abstrakteren und allgemeineren Verständnis des V. Mit der Einführung des δ-Algorithmus formulierte Joseph Louis de Lagrange 1762 den V. radikal neu, betonte den Begriff der Variation und steckte damit den allgemeinen math. Rahmen für die weitere Entwicklung ab. Fast ein halbes Jahrhundert später (1806) reformulierte Lagrange den V. in einer umfassenden Abhandlung zur Analysis und Differentialrechnung.

Obwohl sich der V. in erster Linie als ein Teil der Analysis entwickelte, war doch auch seine Anwendung in der Mechanik von Bedeutung. Unter Zuhilfenahme von Variationsmethoden zeigte Lagrange, dass ein mechanisches System durch eine skalare (die sog. Lagrange'sche) Funktion vollständig beschrieben werden kann. In der Vorstellung mancher aufgeklärter Denker, wie etwa Pierre Moreau de Maupertuis, legte die Existenz einer solchen Methode nahe, dass die ↗Natur zielgerichtet handle, indem sie das Prinzip der kleinsten Wirkung befolge, d. h. unter vielen möglichen Umsetzungen eines physikalischen Prozesses diejenige wähle, bei der eine bestimmte physikalische Größe den minimalen Wert annimmt [7]. Diesen teleologischen Gesichtspunkt verstärkte Lagranges erfolgreiche Ausarbeitung der Theorie. Trotz des darin liegenden philosophischen Problems prägt sein Formalismus bis heute die Struktur der theoretischen ↗Physik.

Euler und Lagrange zeigten durch ihre Untersuchung der sog. Ersten Variation, dass die Lösung eines Variationsproblems eine bestimmte Differential-↗Gleichung erfüllen muss, die heute als Euler-Lagrange'sche Gleichung bekannt ist. In einer 1788 veröffentlichten Untersuchung der Zweiten Variation leitete Adrien-Marie Legendre ein zusätzliches Kriterium ab, das von dieser Lösung erfüllt werden muss; er stützte sich dabei auf eine bestimmte Umformung des Variationsintegranden, die die Integration einer weiteren Differentialgleichung erforderte. Er gab weder eine Methode zur Integration dieser Gleichung an noch analysierte er die Bedingungen, unter denen die Umformung gültig ist.

In einer 1837 erschienenen folgenreichen Arbeit umriss Carl Gustav Jacobi genau solch eine Theorie, die eine systematische Methode zur Transformation der Zweiten Variation enthielt und außerdem Kriterien zur Bestimmung der später sog. konjugierten Punkte lieferte [2]. In den folgenden 30 Jahren beschäftigte sich eine Reihe von Autoren mit der Ausarbeitung seiner Ergebnisse, gipfelnd in einer brillanten Abhandlung Adolph Mayers von 1868, welche das Transformationsproblem mit der Theorie der konjugierten Punkte verband [5].

In den 1830er Jahren verknüpften der irische Mathematiker William Rowan Hamilton und Jacobi den V. grundlegend mit der Theorie der analytischen ↗Mechanik. Sie leiteten die dynamischen Gleichungen in kanonischer Form aus einem Variationsprinzip ab und zeigten, dass deren Lösung äquivalent zu der einer einzigen partiellen Differentialgleichung ist, der später sog. Hamilton-Jacobi'schen Gleichung [6]. Diese Theorie bildete die Grundlage für ein umfangreiches Forschungsprogramm in der ↗Himmelsmechanik der folgenden Jahrzehnte, das u. a. Charles Eugène Delaunay, François Tisser und Henri Poincaré ausarbeiteten.

In der zweiten Hälfte des 19. Jh.s entwickelte sich der V. in neue Richtungen [5. Kap. 5–7]. Die gesamte Theorie wurde streng im Rahmen der Funktionen reeller Variabeln formuliert. Karl Weierstraß führte eine neue Methode ein, die hinreichende Bedingungen für die Existenz eines Maximums oder Minimums bei Variationsproblemen mit einfachem Integral lieferte. Im 20. Jh. sollte man den klassische V. in den größeren Kontext der Optimierung einbeziehen, wie bei der Untersuchung minimaler Flächen, Variationsrechnung im Großen, linearem Programmieren, Optimierung unter Nebenbedingungen und *operations research*.

→ Analysis; Differentialkalkül; Mathematische Wissenschaften; Mechanik; Zahl

Quellen:

[1] L. EULER, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, 1744 (Ndr. 1952) [2] C.G.J. JACOBI, Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen, in: Journal für die reine und angewandte Mathematik 17, 1837, 68–82 [3] J.L. LAGRANGE, Leçons sur le calcul des fonctions, 1806.

Sekundärliteratur:

[4] C. FRASER, Die Genese der Variationsrechnung, in: H.N. JAHNKE (Hrsg.), Geschichte der Analysis, 1999, 449–486 [5] H.H. GOLDSTINE, A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century, 1980 [6] M. NAKANE / C. FRASER, The Early History of Hamilton-Jacobi Theory, in: Centaurus 44, 2003, 161–227 [7] H. PULTE, Das Prinzip der kleinsten Wirkung und die Kraftkonzeptionen der rationalen Mechanik, 1989 [8] R. THIELE, Von der bernoullischen Brachistochrone zum Kalibrator-Konzept. Ein historischer Abriss zur Entstehung der Feldtheorie in der Variationsrechnung, 2007.

Craig Fraser (Ü: G. R.)