Lösungsmethoden durch Reduktion der Ordnung einer Differentialgleichung im Sinne von Abbildungen zwischen Sobolew- Räumen zu interpretieren. Außerdem wird der Begriff einer Lösung mit dem Aufkommen der Distributionentheorie auf eine Art und Weise verallgemeinert, die der Theorie neue Einheitlichkeit verleiht.

Craig Fraser, 1999. "Die Genese der Variationsrechnung". In Hans Niel Jahnke and Sibylle Ohly (Eds.), *Geschichte der Analysis*. Spectrum Akademischer Verlag Heidelberg and Berlin. Pages 449-486

12 Die Genese der Variationsrechnung

Craig Fraser

12.1 Einleitung

Als eine für sich bestehende Teildisziplin der Mathematik geht die Variationsrechnung auf eine 1696 publizierte „Einladung" Johann Bernoullis an die Mathematiker Europas zurück, die Kurve der kürzesten Fallzeit, die Brachystochrone, zu finden. Dieses und andere Probleme, bei denen eine Kurve mit einer Minimal- oder Maximaleigenschaft bestimmt werden sollte, konnte mit den Techniken des neuen Kalküls gelöst werden, erforderte aber auch neue Ideen, die letztlich zur Etablierung einer neuen Disziplin führten. An der Entwicklung dieses Gebietes waren führende Analytiker wie Jakob Bernoulli, Leonhard Euler und Joseph Louis Lagrange beteiligt. Bernoulli fand eine allgemeine und erfolgreiche Lösungsmethode. Diese griff Euler auf und schuf eine zusammenhängende mathematische Theorie, die sich auf gewisse Differentialgleichungen stützte. 1762 wurde das Gebiet durch Lagranges Einführung des δ-Algorithmus radikal umgeformt. Diese Formulierung des Variationsproblems steckte den allgemeinen mathematischen Rahmen für die weitere Entwicklung ab.

Euler und Lagrange zeigten durch Untersuchung der sogenannten ersten Variation, daß die Lösung eines Variationsproblems eine bestimmte Differentialgleichung erfüllen muß, die heute als Eulersche oder Euler-Lagrangesche Differentialgleichung bekannt ist. In einer 1788 veröffentlichten Untersuchung der zweiten Variation leitete Legendre ein zusätzliches Kriterium ab, das von dieser Lösung erfüllt werden muß. Seine Herleitung stützte sich auf eine bestimmte Umformung des Variationsintegranden, die die Integration einer weiteren Differentialgleichung implizierte. Er gab weder eine Methode zur Integration dieser Gleichung an, noch analysierte er die Bedingungen, unter denen die Umformung gültig ist. In einer folgenreichen Arbeit, die 1837 erschien, umriß Carl Gustav Jacobi genau solch eine Theorie, die eine systematische Methode zur Umformung der zweiten Variation enthielt und außerdem Kriterien zur Bestimmung der später so genannten konjugierten Punkte lieferte. In den folgenden 30 Jahren beschäftigten sich eine Reihe von Autoren mit der Ausarbeitung der in Jacobis Arbeit enthaltenen Ergebnisse. Diese Arbeiten gipfelten 1868 in einer Abhandlung von Adolph Mayer, der eine brillante Synthese der Theorie Jacobis gab.

In den 70er Jahren des 19. Jahrhunderts trat die Variationsrechnung in eine neue Phase ein, als deutsche Forscher begannen, das Gebiet rigoros vom Standpunkt der Theorie reeller Funktionen aus zu untersuchen. 1877 veröffentlichte G. Erdmann Bedingungen, unter denen gebrochene Extremale, d. h. Funktionen, deren Ableitungen in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig sind, Lösungen eines Variationsproblems sind. Zwei Jahre später untersuchte P. Du Bois-Reymond detailliert die grundlegenden Variationsmethoden vom Standpunkt der reellen Analysis, und Mitte der 80er Jahre unterzog Ludwig Scheeffer die traditionellen Bedingungen von Euler, Legendre und Jacobi einer sehr genauen kritischen Prüfung.

Die führende Persönlichkeit in der neuen Variationsrechnung war Karl Weierstraß. In seinen Vorlesungen in den 70er und frühen 80er Jahren bahnte er einer neuen Methode den Weg, die hinreichende Bedingungen für die Existenz eines Maximums oder Minimums bei Variationsproblemen mit einfachem Integral lieferte. Weierstraß' Begriff eines Feldes von Extremalen erlaubte es, eine viel größere Klasse von Vergleichsvariationen in die Theorie einzubeziehen. Eine bedeutende Vereinfachung der Weierstraßschen Methode wurde von Hilbert in seinem berühmten Pariser Vortrag von 1900 vorgestellt. Zwischen 1895 und 1905 erschienen Arbeiten von Ernst Zermelo, Adolph Kneser, E. R. Hedrick, Oskar Bolza und E. J. B. Goursat, die auf der Weierstraßschen Feldmethode beruhten. Die bedeutenden Lehrbücher von Bolza (1909) und Jacques Hadamard (1910) lieferten eine meisterhafte Synthese der damals auf diesem Gebiet erzielten Leistungen.

Der vorliegende Überblick folgt diesen Hauptlinien. Wichtige Themen, die übergangen oder unvollständig diskutiert werden, betreffen die Theorie der mehrfachen Integrale, die Optimierung unter Nebenbedingungen, direkte Methoden, die Zusammenhänge zwischen Differentialgeometrie und Variationsrechnung und weitere Entwicklungen wie die Existenztheorie, die Variationsrechnung im Großen und die Kontrolltheorie, die für unser Jahrhundert kennzeichnend sind. In den beiden letzten Abschnitten diskutieren wir Variationsprinzipien in der Mechanik und Existenzprobleme, deren Geschichte wir allerdings nur kurz streifen können.

12.2 Die Vorgeschichte

Irgendwann um 150 v. Chr. schrieb der griechische Mathematiker Zenodoros eine Abhandlung über *isoperimetrische Figuren*. Seine Ergebnisse wurden ein halbes Jahrtausend später von Pappos im fünften Buch seiner *Collectio*, eines um 350 n. Chr. verfaßten Werkes, dargestellt. Pappos' Abhandlung wurde von Commandino ins Lateinische übersetzt (publiziert 1588) und war im 17. Jahrhundert ein viel gelesenes und studiertes Werk.

Pappos leitete verschiedene Ergebnisse über die Flächeninhalte von Kreisen und Polygonen gleichen Umfangs ab. Er zeigte, daß der Kreis einen größeren Flächeninhalt hat als jedes reguläre Polygon von gleichem Umfang. Von zwei gegebenen regulären Polygonen gleichen Umfangs besitzt dasjenige mit der größeren Seitenzahl die größere Fläche. Und schließlich zeigte er, daß von zwei Polygonen gleicher Seitenzahl und gleichen Umfangs - eines regulär und das andere nicht regulär - das reguläre Polygon den größeren Flächeninhalt hat. Pappos bewies ferner einige Resultate im Hinblick auf das Volumen einer Kugel und die Volumina von Körpern mit gleichem Oberflächeninhalt wie die Kugel.

In Galileis *Discorsi* von 1638 wurde die Untersuchung des Falls unter Zwangsbedingungen auf eine neue und verbesserte physikalische und mathematische Grundlage gestellt. Eines der von ihm betrachteten Probleme bestand darin, die Bewegung entlang dem Bogen eines Kreises mit der entsprechenden Bewegung entlang einer Reihe von in den Kreis einbeschriebenen Sehnen zu vergleichen. Galilei stellte fest, daß die Fallzeit längs der aus mehreren Sehnen bestehenden Bahn abnimmt, wenn die Anzahl der Sehnen zunimmt. Indem er den Kreis als Grenzwert polygonaler Sehnenbahnen betrachtete, folgerte er, daß die Fallzeit entlang der Kreislinie kürzer ist als die entsprechende Fallzeit entlang der Sehne, die den Anfangs- und Endpunkt verbindet (Galilei 1638/1973, 199-214, Wisan 1974).

Die Ergebnisse von Pappos und Galilei betrafen Vergleiche zwischen Kreis und Polygon. Keiner der beiden betrachtete sein jeweiliges Problem im Hinblick auf eine allgemeinere Klasse von Vergleichskurven. Diese Einschränkung kann dem Fehlen geeigneter mathematischer Methoden zur Darstellung einer beliebigen ebenen Kurve und zur Analyse ihres Verhaltens zugeschrieben werden. Mit der Erfindung der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung wurde es möglich, weitergehende Untersuchungen durchzuführen. Das erste genuine Problem der Variationsrechnung scheint von Isaac Newton in seinen *Principia Mathematica* von 1687 formuliert worden zu sein. In einem Scholium zur Proposition 34 des II. Buches betrachtete Newton das Problem, den Umdrehungskörper zu bestimmen, der den geringsten Widerstand erfährt, wenn er sich in der Richtung seiner Achse in einem widerstehenden Medium bewegt. Er konnte eine Bedingung für die minimierende Kurve in Abhängigkeit von ihrer Kurventangente in jedem Punkt ableiten. Dazu schreibt Whiteside: „Die unmittelbare Reaktion von Newtons Zeitgenossen auf dieses Scholium in den *Principia* von 1687 war fast völliges Unverständnis“ (Newton 1974, 466). Eine Durchsicht von Newtons privaten Aufzeichnungen, die erstmals in unserem Jahrhundert veröffentlicht worden sind, läßt erkennen, daß er zur Lösung dieses Problems Techniken angewandt hatte, die den von Jakob Bernoulli später entwickelten Techniken ähneln (vgl. Goldstine 1980, 7-29). Leider enthalten die publizierten *Principia* nur eine Angabe der Lösung. Newtons Methoden scheinen seinen Zeitgenossen unbekannt geblieben zu sein, und sein Werk hat die Entwicklung der Variationsrechnung kaum beeinflußt.

12.3 Die Bernoullis, Taylor und Euler

Die frühe Leibnizsche Infinitesimalrechnung war eine Art geometrischer Analysis, in der die Algebra der Differentiale auf das Studium der „höheren“ Geometrie angewandt wurde. Man untersuchte eine Kurve in der infinitesimalen Nachbarschaft eines Punktes und charakterisierte ihren Gesamtverlauf mit Hilfe einer Differentialgleichung.

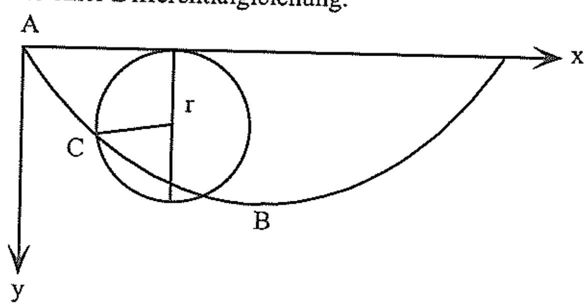

Abbildung 12. 1

Eine wichtige Kurve der frühen Variationsrechnung war die Zykloide. Diese beschreibt die Bahn eines Punktes, der sich auf dem Umfang eines Kreises bewegt, während dieser auf einer Geraden abrollt, ohne zu gleiten. Die Zykloide besitzt eine einfache Differentialgleichung. Der erzeugende Kreis mit dem Radius r möge entlang der x-Achse abrollen, und der vertikale Abstand möge auf der y-Achse vom Nullpunkt nach unten gemessen werden (Abb. 12.1). Ein elementares geometrisches Argument zeigt, daß die Gleichung der Zykloide

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \frac{2r}{y} \tag{12.1}$$

lautet, wobei $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ das Differential der Bogenlänge ist.

Bemerkenswerterweise war die Zykloide die Lösung des Brachystochronenproblems. Man betrachtet eine Kurve, die zwei Punkte in einer vertikalen Ebene verbindet, sowie ein Teilchen, das sich entlang dieser Kurve unter dem Einfluß der Schwerkraft bewegt. Gesucht ist die Kurve, für die die Fallzeit ein Minimum ist. Nehmen wir den Koordinatenursprung als den ersten Punkt und (a,b) als den zweiten. Wir setzen voraus, daß das Teilchen aus der Ruhelage startet. Laut Galileis Gesetz beträgt die Geschwindigkeit eines Teilchens beim Fall unter Zwangsbedingungen $\sqrt{2gy}$, wobei g eine Beschleunigungskonstante und y die Fallhöhe ist. Wir erhalten die Beziehungen

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \quad \text{oder} \quad dt = \frac{1}{\sqrt{2gy}} ds = \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}. \tag{12.2}$$

Die Gesamtzeit des Falls wird daher durch das Integral

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx \tag{12.3}$$

gegeben. Das Brachystochronenproblem besteht darin, die spezielle Kurve $y = y(x)$ zu finden, die dieses Integral minimiert.

Auf Johann Bernoullis öffentliche Aufforderung im Jahre 1696 hin wurden Lösungen dieses Problems von seinem älteren Bruder Jakob, von Johann selbst und von Newton und Leibniz vorgelegt. Jeder von ihnen zeigte, daß die Bedingung einer minimalen Fallzeit zu Gleichung (12.1) führt, und alle außer Leibniz schlossen daraus, daß die gesuchte Kurve eine Zykloide ist. Goldstine (1980, 36) vermutet aber, daß Leibniz bereits 1686 wußte, daß diese Differentialgleichung auf die Zykloide führt. Johanns Lösung stützte sich auf eine optisch-mechanische Analogie, die heute aus ihrer Beschreibung in Ernst Machs *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt* wohlbekannt ist (Mach 1883/1973, 412-414). Obwohl von beträchtlichem Interesse, gab Johann Bernoullis Lösung keine geeignete Basis für die Weiterentwicklung der Variationsrechnung ab.

Jakob Bernoullis Lösung dagegen war beispielhaft für die Ideen, die sich zur Variationsrechnung weiterentwickeln sollten. Er betrachtete drei beliebige unendlich nahe Punkte C, G und D auf der hypothetischen minimierenden Kurve und konstruierte eine zweite benachbarte Kurve, die mit der ersten bis auf den Bogen *CGD*, der durch *CLD* ersetzt ist, übereinstimmt (Abb. 12.2). Da die Kurve die Fallzeit minimiert, ist die Zeit, in der *CGD* durchlaufen wird, näherungsweise gleich der Zeit, in der *CLD* durchlaufen wird. Mit Hilfe dieser Bedingung und der aus der Dynamik folgenden Relation $ds/dt \propto \sqrt{y}$ konnte Bernoulli die Gleichung (12.1) herleiten.

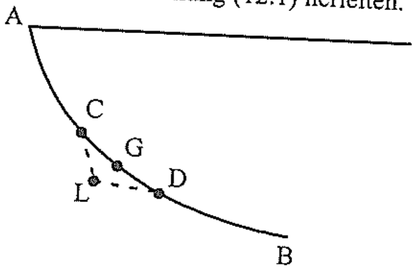

Abbildung 12. 2

Jakob Bernoulli untersuchte auch Probleme, in denen die minimierende oder maximierende Kurve eine zusätzliche Bedingung in Form eines Integrals erfüllte. Prototyp war das klassische isoperimetrische Problem. Seine Idee bestand darin, die Kurve in zwei aufeinanderfolgenden Ordinaten zu variieren. Dadurch erhielt er einen zusätzlichen Freiheitsgrad und nutzte diese Nebenbedingung zur Ableitung einer Differentialgleichung. Obwohl Jakob 1705 starb, wurden einige seiner Ideen fortgeführt und von Brook Taylor in seinem Werk *Methodus incrementorum* von 1715 aufgegriffen. Taylor entwickelte und verfeinerte Jakobs Konzeption geschickt, wobei er eine Reihe wichtiger analytischer Neuerungen einführte. Durch Taylors Untersuchung angeregt und mit der Absicht, den Prioritätsanspruch seines Bruders zu sichern, machte sich der damals achtundvierzigjährige Johann Bernoulli Jakobs Methoden zu eigen und entwickelte sie in mehr geometrischer Weise in einer 1718 veröffentlichten Schrift weiter.

In zwei Abhandlungen, die 1738 und 1741 in der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften veröffentlicht wurden, gewann Euler aus den verschiedenen Lösungen Jakob und Johann Bernoullis sowie aus den Untersuchungen Taylors eine allgemeine Methode zur Lösung von Variationsproblemen, die ein Integral enthalten. Diese Untersuchungen arbeitete er weiter aus und machte sie zum Gegenstand seiner klassischen Abhandlung *Methodus inveniendi curvas lineas* (1744). Diese Abhandlung, die Euler im Alter von 37 Jahren veröffentlichte, war eine bemerkenswerte Synthese, in der er faktisch die *Variationsrechnung* als einen eigenständigen Zweig der Analysis begründete. Der Name selbst kam erst später auf.

Euler erkannte, daß die verschiedenen Integrale in den früheren Problemen alle von der Form

$$\int_a^b Z\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) dx \tag{12.4}$$

sind, wobei Z eine Funktion von x, y und den ersten n Ableitungen von y in bezug auf x ist. Als eine fundamentale Bedingung, die eine Lösung des Variationsproblems befriedigen muß, leitete er eine Differentialgleichung ab, die heute als Eulersche oder Euler-Lagrangesche Differentialgleichung bekannt ist.

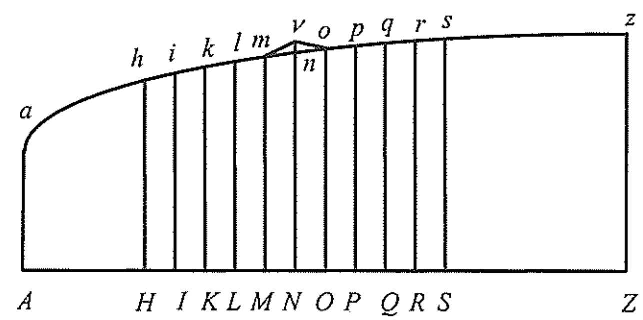

Abbildung 12. 3

Die Herleitung dieser Gleichung stellte Euler im zweiten Kapitel für den Fall $n = 1$ dar, in der die Linie *mno* die hypothetische extremale Kurve ist (Abbildung 12.3). Die Buchstaben M, N, O bezeichnen drei unendlich nahe Punkte auf der x-Achse AZ. Die Buchstaben m, n, o bedeuten entsprechende Punkte auf der durch die Ordinaten Mm, Nn, Oo gegebenen Kurve. Es sei $AM = x$, $AN = x'$, $AO = x''$ und $Mm = y$, $Nn = y'$, $Oo = y''$. Der Differentialkoeffizient p ist definiert durch die Relation $dy = pdx$, also $p = dy/dx$. Dann gelten die folgenden Beziehungen:

$$p = \frac{y' - y}{dx}, \qquad p' = \frac{y'' - y'}{dx}. \tag{12.5}$$

Das Integral $\int_a^b Zdx$ wurde von Euler als eine unendliche Summe der Form $\ldots + Z_{I}dx + Zdx + Z'dx + \cdots$ betrachtet, wobei Z_{I} der Wert von Z in $x - dx$, Z

sein Wert in x und Z' sein Wert in $x+dx$ ist und die Summation bei $x=a$ beginnt und bei $x=b$ endet. Es ist wichtig zu erwähnen, daß Euler keine Grenzübergänge oder endlichen Approximationen anwandte. Nun wird der Ordinate y' das unendlich kleine „Stückchen" nv hinzugefügt und auf diese Weise eine Vergleichskurve *amvoz* erhalten. Nach der Aufgabenstellung wird die Differenz zwischen dem Wert von $\int_a^b Zdx$ entlang dieser Kurve und dem von $\int_a^b Zdx$ längs der tatsächlichen Kurve Null sein. Der einzige Anteil des Integrals, der durch die Variation von y' beeinflußt wird, ist $Zdx + Z'dx = (Z+Z')dx$. Euler schrieb:

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp, \qquad dZ' = M'dx + N'dy' + P'dp'. \tag{12.6}$$

Er interpretierte dann die Differentiale in (12.6) als die infinitesimalen Veränderungen in Z, Z', x, y, y', p, p', die sich ergeben, wenn y' um nv vergrößert wird. Aus (12.5) ersehen wir, daß dp und dp' gleich nv/dx und $-nv/dx$ sind. Diese Änderungen werden von Euler in einer Tabelle dargestellt, bei der die Variablen in der linken und ihre korrespondierenden Inkremente in der rechten Spalte stehen. Danach folgt aus (12.6)

$$dZ = P\cdot\frac{nv}{dx}, \qquad dZ' = N'\cdot nv - P'\cdot\frac{nv}{dx}. \tag{12.7}$$

Daher ist die Gesamtänderung von $\int_a^b Zdx$ gleich

$$(dZ + dZ')dx = nv\cdot(P + N'dx - P')$$

Dieser Ausdruck muß gleich Null sein. Euler setzte $P' - P = dP$ und ersetzte N' durch N. Folglich erhielt er $0 = Ndx - dP$ oder

$$N - \frac{dP}{dx} = 0 \tag{12.8}$$

als die abschließende Gleichung des Problems.

Gleichung (12.8) ist der einfachste Fall der Eulerschen Differentialgleichung, die eine Bedingung angibt, welche durch den minimierenden oder maximierenden Bogen befriedigt werden muß. Sie lautet in moderner Schreibweise

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{d(\partial Z/\partial y')}{dx} = 0.$$

Euler leitete auch die entsprechende Gleichung her, wenn höhere Ableitungen von y in bezug auf x im Variationsintegral erscheinen. Dies war eine große theoretische Leistung. Sie faßte die vielen Spezialfälle und Beispiele, die in den Arbeiten früherer Forscher aufgetreten waren, in einer Gleichungsform zusammen.

Vom Standpunkt der begrifflichen Grundlagen der Analysis ist Kapitel 4 der Eulerschen Abhandlung besonders interessant. In Gleichung (12.8) sind die Variablen x und y die orthogonalen Koordinaten eines Punktes auf der minimierenden Kurve (vgl. Abbildung 12.3). In Kapitel 4 jedoch berechnete Euler Gleichung (12.8) bei mehreren Problemen, in denen die Variablen eine ganz verschiedene geometrische Interpretation haben. Beispielsweise formulierte er das Problem des kürzesten Abstands zwischen zwei Punkten mit Hilfe von Polarkoordinaten, leitete (12.8) in Abhängigkeit von diesen Variablen her und bewies, daß die sich ergebende Kurve eine Gerade ist. Sein Vorgehen zeigte, daß die bei der Herleitung von (12.8) benutzte Argumentation sehr allgemein ist und nicht von der in Abbildung (12.3) unterstellten Interpretation von x und y abhängt. Wie Euler selbst bemerkte, sind die Variablen des Problems abstrakte Größen, und die Figur ist nur eine bequeme geometrische Veranschaulichung eines zugrunde liegenden analytischen Prozesses (vgl. Fraser 1996).

12.4 Lagrange

Lagrange leistete seinen ersten bedeutenden Beitrag zur Mathematik als 19jähriger. Dieser bestand in der Erfindung des δ–Algorithmus zur Lösung der Probleme von Eulers *Methodus inveniendi*. Im Jahre 1755 teilte er Euler seine neue Methode brieflich mit, und 1762 veröffentlichte er sie in den Berichten der Turiner Akademie der Wissenschaften. Sein δ-Algorithmus erlaubte die systematische Ableitung der Variationsgleichungen und erleichterte die Behandlung der Randbedingungen. Seine Neuerung wurde von Euler sofort aufgegriffen, der den Namen „Variationsrechnung" einführte, um das auf der neuen Methode beruhende Gebiet zu bezeichnen.

In seinem Buch von 1744 hatte Euler den etwas komplizierten Charakter seines Variationsprozesses bemerkt und die Entwicklung einer einfacheren Methode verlangt, um die Variationsgleichungen abzuleiten. Lagranges neuer Ansatz erwuchs aus seiner stillschweigenden Erkenntnis, daß das Symbol d in

Eulers Herleitung von (12.8) auf zwei verschiedene Weisen gebraucht wurde. In (12.8) und dem letzten Schritt, mit dem man (12.8) gewinnt, bezeichnete d ein Differential, wie es in der kontinentaleuropäischen Analysis jener Zeit gewöhnlich gebraucht und verstanden wurde (vgl. Kap. 3 und 4). Das Differential dx wurde konstant gehalten und das jeder anderen Variablen war dann gleich der Differenz ihrer Werte an der Stelle x und an einer um dx von x entfernten Stelle. Im Gegensatz dazu wurden die Differentiale dx, dy usw., die in (12.6) erscheinen, von Euler als die Änderungen in x, y usw. interpretiert, die sich ergeben, wenn die einzelne Ordinate y um das „Stückchen" nv vermehrt wird. So sind die „Differentiale" dy', dp, dp' gleich nv, nv/dx, $-nv/dx$; und die „Differentiale" dx, dy, dp'' usw. sind gleich Null.

Der junge Lagrange besaß den Scharfblick, diesen zweifachen Gebrauch zu erkennen und erfand das Symbol δ, um den zweiten Typ einer differentiellen Änderung zu bezeichnen. Unter Benutzung dieses Symbols entwickelte er ein neues analytisches Verfahren, um Extremalprobleme zu untersuchen. Obwohl seine Methode dazu dienen sollte, Kurven in der Ebene zu vergleichen, wurde sie nichtsdestoweniger sehr formal eingeführt. Das Symbol δ besitzt Eigenschaften, die dem gewöhnlichen d der Differentialrechnung analog sind. So gelten zum Beispiel die Regeln $\delta(x+y)=\delta x+\delta y$ und $\delta(xy)=x\delta y+y\delta x$. Außerdem sind d und δ vertauschbar: $d\delta=\delta d$, wie das auch für d und den Integraloperator $\int$ der Fall ist.

Der δ-Algorithmus führte zu einer neuen und sehr einfachen Ableitung von Eulers Gleichung (12.8): $y = y(x)$ ist so zu bestimmen, daß

$$\delta\int_a^b Z dx = 0, \tag{12.9}$$

mit $Z=Z(x,y,p)$ und $p=dy/dx$. Wenn wir den δ-Operator auf den Ausdruck Z anwenden, erhalten wir

$$\delta Z = N\delta y + P\delta p. \tag{12.10}$$

Zu beachten ist, daß hier alle Ordinaten gleichzeitig variiert werden und nicht nur eine, wie das in Eulers Analysis der Fall war. Da δ und $\int$ vertauschbar sind, haben wir

$$\delta\int_a^b Z dx = \int_a^b \delta Z dx = \int_a^b (N\delta y + P\delta p) dx. \tag{12.11}$$

Weil d und δ vertauschbar sind, haben wir auch $\delta p = \delta(dy/dx) = d(\delta y)/dx$. Partielle Integration führt zu der Identität

$$\int_a^b P\delta p dx = \int_a^b P\frac{d(\delta y)}{dx}dx = P\delta y\Big|_a^b - \int_a^b \frac{dP}{dx}\delta y dx. \tag{12.12.}$$

Folglich wird die Bedingung $\delta\int_a^b Z dx = 0$ zu

$$P\delta y\Big|_a^b - \int_a^b\left(N-\frac{dP}{dx}\right)\delta y dx = 0. \tag{12.13}$$

Wir nehmen an, daß δy in den Randwerten $x=a$ und $x=b$ gleich Null ist. (12.13) reduziert sich dann auf

$$\int_a^b\left(N-\frac{dP}{dx}\right)\delta y dx = 0, \tag{12.14}$$

und daraus können wir die Eulersche Gleichung

$$N-\frac{dP}{dx}=0 \tag{12.15}$$

folgern. In seiner Untersuchung stützte sich Lagrange stark auf die algorithmischen und algebraischen Eigenschaften seines neuen Verfahrens, und es ist nicht klar, wieweit er sie als ein Mittel zur Durchführung eines Kurvenvergleichs ansah oder als ein rein formales Konstrukt (vgl. Goldstine 1980, 112). Man kann in dieser frühen Arbeit von Lagrange eine bemerkenswerte analytische Einstellung erkennen, die später ein hervorstechendes Merkmal seiner reifen Mathematik wurde: die Ablehnung geometrischer Diagramme und Beweismethoden. Mit fortschreitender Karriere sollten sich seine Forschungen in der Variationsrechnung eng mit der Konzeption der Infinitesimalrechnung als algebraischer Analysis verknüpfen (vgl. Kap. 4), die in seinen berühmten Lehrbüchern von 1797 und 1801 am systematischsten zum Ausdruck gekommen ist.

Euler griff in seinen Schriften der 1760er und 1770er Jahre Lagranges Methode auf. In einer 1772 veröffentlichten Abhandlung stellte er dar, was zur Standardinterpretation des δ-Prozesses als eines Mittels zum Vergleich von

Kurven- und Funktionsklassen werden würde. Wir nehmen an, daß y eine Funktion von x und einem Parameter t ist, $y = y(x,t)$, wobei die gegebene Kurve $y = y(x)$ durch den Wert von $y(x,t)$ bei $t = 0$ gegeben wird. Euler definiert dann δy als $(\partial y/\partial t)\big|_{t=0} dt$. Wenn wir $y(x,t) = X(x) + t \cdot V(x)$ setzen, wo $y(x) = X(x)$ die gegebene Kurve und $V(x)$ eine Vergleichs- oder Inkrementfunktion ist, erhalten wir $\delta y = dt \cdot V(x)$. In dieser Konzeption gewinnt man die Variation eines komplizierteren Ausdrucks, bestehend aus $y(x, t)$ und seinen Ableitungen in bezug auf x, indem man die partielle Ableitung bezüglich t nimmt, $t = 0$ setzt und den multiplikativen Faktor dt einführt. In der späteren Variationsrechnung wurde dann häufig der Parameter ε anstelle von t gebraucht.

12.5 Legendre

In einer Abhandlung von 1788 führte Legendre die Untersuchung eines Ausdrucks ein, der später als zweite Variation bezeichnet wurde. Das betrachtete Variationsintegral sei

$$I = \int_a^b f(x, y, y')dx, \tag{12.16}$$

und eine gegebene Funktion $y = y(x)$ mache das Integral I zu einem Maximum oder Minimum. Man setze $\delta y = w(x)$ mit $w(a) = w(b) = 0$. Die erste und zweite Variation I_1 und I_2 sind dann definiert als

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} w + \frac{\partial f}{\partial y'} w' \right) dx, \\ I_2 &= \int_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} w^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} ww' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} w'^2 \right) dx. \end{aligned} \tag{12.17}$$

Später werden wir die Standard-Abkürzungen

$$P = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad Q = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}, \quad R = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \tag{12.18}$$

für die zweiten partiellen Ableitungen benutzen. Die Differenz des Wertes von I zwischen dem aktuellen und dem Vergleichsbogen beträgt

$$\Delta I = I_1 + \frac{1}{2} I_2 + \text{Terme höherer Ordnung}. \tag{12.19}$$

Es ist klar, daß I_1 in dieser Entwicklung überwiegen wird. Wenn ein Minimum eintreten soll, dann muß folglich I_1 für alle zulässigen $w(x)$ Null sein. Aus diesem Sachverhalt können wir mit Hilfe des Lagrangeschen Verfahrens die Gültigkeit der Eulerschen Gleichung für diesen Problemtyp schließen. Legendre erkannte, daß es auch erforderlich ist, I_2 zu untersuchen und nachzuweisen, daß es für alle zulässigen $w(x)$ positiv ist. Sei $v = v(x)$ eine Funktion von x; wir betrachten den Ausdruck

$$\frac{d}{dx}(w^2 v). \tag{12.20}$$

Wegen $w(a) = w(b) = 0$ ist das Integral von (12.20) gleich Null:

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(w^2 v) dx = 0. \tag{12.21}$$

Deshalb ergibt sich, wenn wir (12.21) zu (12.17b) addieren, keine Änderung im Wert der zweiten Variation:

$$I_2 = \int_a^b \left((P + v')w^2 + 2(Q + v)ww' + Rw'^2 \right) dx. \tag{12.22}$$

Der Integrand ist ein quadratischer Ausdruck in w und w'. Legendre bemerkte, daß er ein vollständiges Quadrat wird, wenn

$$R(P + v') = (Q + v)^2. \tag{12.23}$$

Für ein $v(x)$, das diese Differentialgleichung erfüllt, ist die zweite Variation

$$I_2 = \int_a^b R\left(w' + \frac{Q+v}{R} w\right)^2 dx . \tag{12.24}$$

Es ist klar, daß diese Umformung nur möglich ist, wenn $R = \partial^2 f / \partial y'^2$ über dem Intervall $[a,b]$ nicht Null ist. Legendre schloß, daß die vorgeschlagene Lösung tatsächlich ein Minimum sein wird, wenn wir über dem Intervall

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} > 0 \tag{12.25}$$

haben. (12.25) wurde später Legendresche Bedingung genannt.

Legendre dehnte seine Analyse auf den Fall aus, bei dem die zweite Ableitung von y in bezug auf x im Variationsintegranden erscheint. Hier schließt die zugehörige Transformation die Einführung dreier Hilfsfunktionen v, v_1, v_2 ein, die durch drei Differentialgleichungen, analog zu (12.23), verknüpft sind. Legendres Resultate warfen verschiedene Fragen auf; einige davon wurden von Lagrange in seiner *Théorie des fonctions analytiques* von 1797 diskutiert. Um die oben erwähnte Transformation durchzuführen, muß man (12.23) integrieren und eine Lösung $v = v(x)$ erhalten. Legendre gab keine allgemeine Methode zur Integration dieser nichtlinearen Differentialgleichung an, und Lagrange zeigte anhand von Beispielen, daß das Integral über dem gegebenen Intervall nicht immer existieren muß. Außerdem kann man für eine gegebene Lösung, die die Legendresche Bedingung erfüllt, Vergleichsfunktionen finden, die einen größeren oder kleineren Wert des Variationsintegrals ergeben, wenn die Größe des Intervalls nicht irgendwie begrenzt ist. Lagrange entwickelte jedoch keine Theorie, um diese Fragen zu beantworten.

12.6 Jacobi

12.6.1 Jacobi und seine „Schule“

Die nächste Figur in unserer Geschichte ist der deutsche Mathematiker Carl Gustav Jacob Jacobi, der 1837 in Crelles Journal eine fruchtbare und sehr originelle Abhandlung veröffentlichte. Die Variationsrechnung ist nur eines von vielen Gebieten der Mathematik, zu denen Jacobi fundamentale Beiträge geleistet hat. Seine Untersuchungen zur Theorie der elliptischen Funktionen, zur Analysis, zur Theorie der Funktionaldeterminanten, zur Zahlentheorie und zur

analytischen Mechanik ließen ihn zu einem der führenden Mathematiker Europas werden. Jacobi entstammte einer jüdischen Familie, konvertierte aber zum Christentum, um eine mathematische Laufbahn einschlagen zu können. Seine mathematisch produktivste Zeit waren die Jahre von 1826 bis 1843, die er an der Königsberger Universität verbrachte. 1843 erhielt Jacobi eine Position in Berlin, wo er bis zu seinem Tod im Jahr 1851 lehrte und forschte.

Neben seinen vielfältigen Arbeiten auf dem Gebiet der Analysis und der Mechanik war Jacobi ein aktiver Lehrer, der einen starken Einfluß auf die jüngeren Mathematiker seiner Zeit hatte. Scriba (1973, 51) schreibt: „Jacobis eindrucksvolle Persönlichkeit und sein mitreißender Enthusiasmus waren derart, daß sich keiner seiner begabten Schüler seiner Faszination entziehen konnte; sie wurden in seine Gedankenwelt hineingezogen, wenn sie in ihrer Arbeit den mannigfaltigen, von ihm vorgeschlagenen Wegen folgten, und repräsentierten bald eine ‘Schule’. C. W. Borchardt, E. Heine, L. O. Hesse, F. J. Richelot, J. Rosenhain und P. L. von Seidel gehörten zu diesem Kreis; sie trugen nicht nur viel zur Verbreitung von Jacobis mathematischen Schöpfungen bei, sondern auch zur Verbreitung der neuen forschungsorientierten Einstellung zum Universitätsunterricht.“[1] Jacobi und der Physiker Franz Neumann orientierten sich am Modell der damaligen philologischen Seminare, und machten in Königsberg ihre Forschungen direkt zum Thema ihrer Lehrveranstaltungen, - eine neue Praxis, die später im ganzen deutschen Universitätssystem übernommen wurde.[2]

12.6.2 Jacobis Abhandlung von 1837

In seiner Abhandlung von 1837 gelang es Jacobi, eine systematische Theorie für Bedingungen zu schaffen, unter denen man ein Maximum oder Minimum für ein Variationsproblem erhält. Seine Abhandlung, in der Beweise und Begründungen fehlten, sollte die Grundlage eines nachhaltigen mathematischen Forschungsprogramms bilden. Wir beginnen unsere Diskussion mit einer Untersuchung seiner grundlegenden anfänglichen Einsicht. Lagranges Methode folgend, integrieren wir die Gleichung $I_1 = 0$ partiell und erhalten

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} V w dx = 0 , \tag{12.26}$$

wobei

---

[1] Näheres über die „Jacobische Schule“ siehe in Klein (1926, 112 - 115).

[2] Siehe Turner (1971).

$$V = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right). \tag{12.27}$$

Weil $w(x)$ beliebig ist, ist es klar, daß die Lösung $y = y(x)$ des Variationsproblems der Eulerschen Differentialgleichung genügen muß:

$$V = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \tag{12.28}$$

Jacobis neue Idee bestand darin, die Beziehung zwischen der ersten und der zweiten Variation mit Hilfe des Variationsoperators δ auf besondere Weise auszudrücken. Zwischen dem Variationsintegral I und seiner ersten und zweiten Variation I_1 und I_2 bestehen die Relationen

$$I_1 = \delta I, \qquad I_2 = \delta I_1. \tag{12.29}$$

Wenn wir I_1 ausdrücken als

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} V w dx, \tag{12.30}$$

nimmt die zweite Variation I_2 die Form

$$I_2 = \delta I_1 = \delta\left(\int_{x_0}^{x_1} V w dx\right) = \int_{x_0}^{x_1} \delta V w dx \tag{12.31}$$

an, oder einfach

$$I_2 = \int_{x_0}^{x_1} \delta V w dx. \tag{12.32}$$

Wie wir gesehen haben, muß die Lösung $y = y(x)$ des Variationsproblems die Eulersche Differentialgleichung (12.28) erfüllen. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung zweiter Ordnung wird zwei willkürliche Konstanten α und β enthalten. Da der Term erster Ordnung I_1 in (12.19) Null ist, ist klar, daß der Term,

der I_2 enthält, in dieser Entwicklung überwiegen wird. Es läßt sich leicht erkennen, daß der Term dritter Ordnung im allgemeinen entweder positiv oder negativ gemacht werden kann. Um ein echtes Extremum zu erhalten, muß deshalb der Fall eintreten, daß es kein $w(x)$ gibt, für das I_2 gleich Null ist. Wir werden also ganz natürlich dazu gebracht, die Bedingungen zu betrachten, unter denen $I_2 = 0$ ist. Aus (12.32) ist offensichtlich, daß $I_2 = 0$, wenn

$$\delta V = 0. \tag{12.33}$$

Es sei $y = y(x,\alpha)$ eine Lösung der Eulerschen Gleichung (12.28), wobei die Schreibweise die Abhängigkeit der Lösung von der willkürlichen Konstanten α andeutet. Wir haben $V(\alpha) = 0$. Wir betrachten α als einen Parameter und vergrößern α um das Inkrement $\delta\alpha$. Wir haben wieder $V(\alpha + \delta\alpha) = 0$. Nun betrachten wir eine Variation, bei der $\delta y = (\partial y/\partial\alpha)\delta\alpha$ ist. Subtrahieren wir $V(\alpha) = 0$ von $V(\alpha + \delta\alpha) = 0$, dann sehen wir, daß $(\partial y/\partial\alpha)\delta\alpha$ eine Lösung von $\delta V = 0$ ist. Gleichermaßen ergibt sich: wenn β eine zweite willkürliche Konstante ist, die in y vorkommt, dann wird $\delta y = (\partial y/\partial\beta)\delta\beta$ eine Lösung von $\delta V = 0$ sein. Da $\delta V = 0$ eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in δy ist, wird die allgemeine Lösung die Form $\delta y = \varepsilon \cdot u(x)$ haben, wobei $u(x)$ durch

$$u(x) = c_1 \frac{\partial y}{\partial\alpha} + c_2 \frac{\partial y}{\partial\beta} \tag{12.34}$$

gegeben ist und c_1, c_2 Konstanten sind.

Jacobis Leistung bestand darin, eine Theorie gefunden zu haben, die die Lösungen der Eulerschen Gleichung mit der Analyse der zweiten Variation verknüpfte. Daher war er in der Lage, die durch (12.34) gegebene Funktion $u(x)$ unmittelbar zur Lösung der Legendreschen Differentialgleichung (12.23) zu verwenden. Das war ein bemerkenswertes Resultat. Jacobi fand es durch eine neue Transformation der zweiten Variation, in der (12.34) eine zentrale Rolle spielte und die I_2 auf die Form (12.24) reduzierte. Ausführliche Ableitungen dieser Lösung wurden von Delaunay (1841) und Spitzer (1854/55) gegeben. Jacobi dehnte seine Theorie auch auf die Behandlung des allgemeineren Falles aus, bei dem der Variationsintegrand höhere Ableitungen von y bezüglich x enthält.

Die durch Jacobi angeregte umfangreiche Forschung galt hauptsächlich der Untersuchung der Transformation der zweiten Variation. Die bemerkenswertesten Beiträge leisteten hier Delaunay (1841), Spitzer (1854/55) und Hesse (1857). In einem kurzen Passus seiner Schrift hatte Jacobi jedoch auch auf einen anderen Aspekt des Problems aufmerksam gemacht, der in der späteren Variationsrechnung Theorie der konjugierten Punkte genannt werden würde. Die wesentliche Frage ist folgende: mögliche minimale Bögen werden Lösungen der Eulerschen Gleichung $V = 0$ sein. Ihre allgemeine Lösung $y = y(x,\alpha)$ enthalte die willkürliche Konstante α. Wir fordern, daß $y = y(x,\alpha)$ durch die Endpunkte gehe. Eine benachbarte Lösung $y = y(x,\alpha+\delta\alpha)$ möge ebenfalls durch die Endpunkte gehen. Da sowohl $y = y(x,\alpha)$ als auch $y = y(x,\alpha+\delta\alpha)$ die Randbedingungen erfüllen, folgt, daß $\delta y = (\partial y/\partial\alpha)\delta\alpha$ eine zulässige Variation ist, d. h. eine solche, für die $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ ist. Für diese Wahl von δy haben wir gemäß Jacobis anfänglicher Einsicht $\delta V = 0$. Folglich ist die entsprechende zweite Variation I_2 Null. In dieser Situation ist klar, daß es kein Minimum geben kann, weil das Vorzeichen der dritten Variation (im allgemeinen) entweder positiv oder negativ gemacht werden kann.

Wenn wir im Anfangspunkt beginnen, werden wir schließlich in einem zweiten Punkt ankommen, wodurch es möglich ist, zwei Lösungen der Eulerschen Gleichung zu finden, die die zugehörigen Randbedingungen erfüllen. Dieser zweite Grenzpunkt, dessen Wert nicht erreicht oder überschritten werden kann, wenn ein Minimum angestrebt wird, sollte später als konjugierter Punkt bekannt werden. Analytisch betrachtet, muß gezeigt werden, daß es nicht möglich ist, Funktionen der Form (12.34) zu finden, die in zwei Punkten des gegebenen Intervalls $[a, b]$ verschwinden. Mit der Untersuchung von (12.34) sind wir in der Lage, die Grenzen zu bestimmen, innerhalb derer es eine Lösung des Variationsproblems gibt.

Jacobi illustrierte diese Beschränkung mit dem Beispiel der elliptischen Bewegung eines Teilchens um ein Kraftzentrum, bei dem die Bahnkurve aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung hergeleitet wird. In den posthum veröffentlichten *Vorlesungen über Dynamik* (1866, 46), die er in den frühen 1840er Jahren gehalten hatte, führte er ein noch einfacheres Beispiel an: den Fall eines Teilchens, das sich auf der Oberfläche einer Kugel bewegt, sonst aber von keiner Kraft abhängt. Das Prinzip der kleinsten Wirkung führt hier zu dem Schluß, daß die Bahnkurve eine Geodätische sein muß. Daher bewegt sich das Teilchen auf einem Großkreis. Wenn wir in einem gegebenen Punkt A beginnen und einen Bogen von 180° durchlaufen, erreichen wir einen Punkt C, der zu A konjugiert ist. Ist der zweite Punkt B gleich oder jenseits von C, dann ist leicht zu erkennen, daß es Vergleichswege gleicher oder kürzerer Distanz gibt.

12.7 Mayer

Nach der Veröffentlichung von Jacobis Schrift fand das Transformationsproblem fünfundzwanzig Jahre lang die größte Beachtung unter den Forschern, während der Theorie der konjugierten Punkte relativ wenig Interesse entgegengebracht wurde. Das traf auch auf Hesses Schrift von 1857 zu, obwohl Hesse für den Fall von Variationsintegralen der Form $\int_a^b f(x,y,y')dx$ gezeigt hatte, daß die Nichtexistenz eines konjugierten Punktes über dem gegebenen Intervall die Gültigkeit der Transformation der zweiten Variation impliziert. Wenn es über dem Intervall $[a, b]$ keinen zu a konjugierten Punkt gibt, dann sind die Bedingungen für die Transformation der zweiten Variation erfüllt. Die Jacobische Theorie bezog sich natürlich in erster Linie auf den allgemeineren Fall, wenn das Variationsintegral die Form $\int_a^b f(x,y,y',\ldots,y^{(n)})dx$ für $n \geq 2$ hat. Hesse versuchte nicht, sein Resultat auf diesen Fall zu erweitern. Es war keineswegs offensichtlich, wie im allgemeinen Fall das Transformationsproblem mit der Theorie der konjugierten Punkte zu verknüpfen wäre.

Es war der Leipziger Mathematiker Adolph Mayer, der diese theoretische Frage klar erkannt und befriedigend gelöst hat. Nachzulesen ist das in seiner Habilitationsschrift von 1866 und in einem zwei Jahre später in Crelles Journal veröffentlichten Aufsatz. Eine vollständige Darlegung seines Resultats ginge über den Rahmen der vorliegenden Studie hinaus. Wir können jedoch den allgemeinen analytischen Hintergrund seiner Untersuchung andeuten. Clebsch (1858a) folgend, formulierte Mayer das fundamentale Variationsproblem als ein Lagrangesches Problem. Angenommen, es gibt n abhängige Variablen $y_1,\ldots,y_n$. Das Variationsintegral hat die Form

$$I = \int_a^b f(x,y,y',\ldots,y^{(n)})dx\,. \tag{12.35}$$

Die Variablen y_i mögen m zusätzlichen Differentialgleichungen der Form

$$\Phi_m(x,y_1,\ldots,y_n,y'_1,\ldots,y'_n) = 0 \tag{12.36}$$

genügen. Man muß I abhängig von (12.36) maximieren oder minimieren. 1806 hatte Lagrange gezeigt, wie die Variationsgleichungen mit Hilfe von Multiplikatoren gewonnen werden können. Wir multiplizieren jede der Gleichungen $\Phi_m = 0$ mit der Multiplikatorfunktion $\lambda_m(x)$ und bilden den Ausdruck

$$F = f + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Phi_i. \tag{12.37}$$

Damit wird die Lösung des Problems die Bedingung (12.36) und die dem Variationsintegranden F entsprechenden Eulerschen Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0 \tag{12.38}$$

erfüllen. Die so formulierte Multiplikatorregel enthält als einen Spezialfall das traditionelle Problem der Maximierung oder Minimierung des Integrals $\int_a^b f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)dx$. Dieses Tatsache wurde von Clebsch in seiner Arbeit von 1858 explizit erwähnt. Man betrachte den Fall $n = 2$. Es sei $f = f(x, y_1, y_2, y'_2)$ und $\Phi = y'_1 - y_2$. Dann ist $F = f + \lambda(y'_1 - y_2)$. Die F entsprechenden Eulerschen Gleichungen sind

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d\lambda}{dx} = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial y_2} - \lambda - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'_2} = 0. \end{aligned} \tag{12.39}$$

Wenn wir den Multiplikator λ aus diesen Gleichungen eliminieren und $y_1 = y$ setzen, erhalten wir die gewöhnliche Eulersche Gleichung, die dem Integral $\int_a^b f(x, y, y', y'')dx$ entspricht:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} = 0. \tag{12.40}$$

Clebsch zeigte in seiner Arbeit, wie die Jacobische Transformationstheorie auf die allgemeine Situation des Lagrangeschen Problems ausgedehnt werden könnte. Mayers Untersuchung der Transformationsbedingungen und der Theorie der konjugierten Punkte bewegte sich im Rahmen von Clebschs Analyse der zweiten Variation. Bei der Herleitung seiner Resultate gebrauchte er die von Hamilton und Jacobi speziell entwickelten Methoden zur Integration der Variationsgleichungen. Mayers Schrift von 1866 war theoretisch und technisch auf dem höchsten Stand der damaligen Mathematik.

12.8 Erdmann

Die mit den klassischen Methoden der Variationsrechnung erzielten Lösungen erfüllen gewisse Glättebedingungen und insbesondere die Forderung, daß das Gefälle des optimierenden Bogens stetig mit der Bogenlänge variiert. In einem 1871 veröffentlichten Buch machte der englische Mathematiker Isaac Todhunter auf „diskontinuierliche" Lösungen aufmerksam, die Eckpunkte enthalten, in denen die Ableitung sprunghaft ihren Wert ändert. Todunters Verwendung der Begriffe „kontinuierlich" und „diskontinuierlich" entsprach dem älteren Stetigkeitsbegriff des achtzehnten Jahrhunderts, bei dem eine Funktion „stetig" hieß, wenn sie durch einen einzelnen analytischen Ausdruck gegeben wurde und sich ihre Ableitung (außer in singulären Punkten) stetig verändert (vgl. Kap. 4). In der Variationsrechnung wurde dieser Sprachgebrauch auch später beibehalten. Auf Todhunters Anstoß hin gelang es 1877 dem Mathematiker G. Erdmann, analytische Bedingungen herzuleiten, die durch solche Bögen mit Ecken erfüllt werden.

Erdmann benutzte dazu eine Formel, die man als Transversalitätsbedingung bezeichnet. Bisher sind wir in unserer Diskussion davon ausgegangen, daß die Variation an den Endpunkten Null ist. Jetzt erweitern wir das Variationsproblem, um extremale Bögen einzubeziehen, bei denen der zweite Endpunkt sowohl in der x- als auch in der y-Richtung variieren darf. Die Formel für die Variation von I lautet nun

$$\delta I = \delta\int_a^b f dx = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right]\delta y dx + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x=b} + \left(f - \frac{\partial f}{\partial y'}y'\right)\delta x\bigg|_{x=b}. \tag{12.41}$$

Spielarten dieser Formel hatten in Lehrbüchern von Lagrange (1806, Lektion 22) und Lacroix (1806, 492 - 493) gestanden, und sie stellten im 19. Jahrhundert ein Standardergebnis dar. Wenn wir fordern, daß der die Endpunkte verbindende Bogen eine Lösung der Eulerschen Gleichung ist, dann reduziert sich (12.41) auf

$$\delta I = \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x=b} + \left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta x\bigg|_{x=b}. \qquad (12.42)$$

Wir betrachten nun das Variationsproblem $\delta\int_a^b f(x,y,y')\,dx = 0$, bei dem die Lösung $y = y(x)$ in $x = c$ eine Ecke hat. Es ist klar, daß das Integral von a bis c und das von c bis b einzeln optimal sein müssen. Deshalb gilt die Eulersche Gleichung für jedes einzelne dieser Intervalle. Betrachten wir einen Vergleichsbogen, der entsteht, indem der Punkt $(c, y(c))$ sowohl in der x- als auch in der y-Richtung variiert wird. Aus der Transversalitätsbedingung erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x=c^-} + \left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta x\bigg|_{x=c^-} - \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x=c^+} - \left(f - y\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta x\bigg|_{x=c^+} = 0. \qquad (12.43)$$

In dieser Formel werden die Zeichen + und - gebraucht, um darauf hinzuweisen, daß die Ableitung y' in den jeweiligen Ausdrücken rechts oder links von c genommen wird. Da $\delta x(c)$ und $\delta y(c)$ beliebig sind, erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y'}\bigg|_{x=c^-} &= \frac{\partial f}{\partial y'}\bigg|_{x=c^+}, \\ \left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\bigg|_{x=c^-} &= \left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\bigg|_{x=c^+} \end{aligned} \qquad (12.44)$$

die die Bedingungen angeben, die ein optimierender Bogen in einem Eckpunkt c erfüllen muß. In der heutigen Variationsrechnung sind sie als Erdmannsche Eckenbedingungen bekannt.

Zwei Aspekte der Erdmannschen Untersuchung waren für die nachfolgende Entwicklung der Variationsrechnung von Bedeutung. Nachdem die Lösungskonzeption erweitert worden war, um Bögen mit Ecken einzubeziehen, war es ganz natürlich, diese Idee auf die Vergleichskurven selbst auszudehnen und damit die Familie der Vergleichskurven enorm zu vergrößern.[3] Die Untersuchung solcher „starker" Extrema, bei denen die Variation Vergleichskurven einschließt, deren Gefälle sich im Verlauf der Kurve um einen beliebigen endlichen Betrag schlagartig ändert, setzte Weierstraß in Gang. Die mit traditionellen Variationsmethoden erhaltenen Lösungen wurden dagegen „schwache" Extrema genannt. Beispiele in der nach-Weierstraßschen Periode für den Unterschied zwischen starken und schwachen Extrema gingen zum Teil auf Erdmanns Arbeit von 1877 zurück.[4]

Der zweite wichtige Aspekt in Erdmanns Schrift war sein Gebrauch der Transversalitätsbedingung. Wie wir noch sehen werden, ging diese Formel direkt in die Weierstraßsche Ableitung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen ein, die seine berühmte Exzeßfunktion einschließt.

[3] Diese Möglichkeit wurde 1871 von Todhunter klar erkannt - siehe die Diskussion weiter unten.

12.9 Weierstraß

12.9.1 Die Vorlesungen von Weierstraß

Die Beiträge von Weierstraß zur Variationsrechnung waren ein Produkt seiner mittleren und reifen Jahre. Obwohl er schon 1865 an der Berliner Universität Vorlesungen über den Gegenstand zu halten begann, wurden seine wichtigsten Ergebnisse erst in den Vorlesungen des Sommers 1879 vorgestellt, als er 63 Jahre alt war. Die schließlich 1927 publizierte Ausgabe basiert auf diesen Vorlesungen sowie auf einer zweiten Vorlesungsreihe, die er 1883 hielt. Obwohl diese Verzögerung der Veröffentlichung die Verbreitung seiner Ideen behinderte, hat er dennoch die zeitgenössische deutsche Forschung in der Variationsrechnung wesentlich beeinflußt. Abschriften seiner Vorlesungen waren privat im Umlauf, und seine Ergebnisse wurden seit Mitte der 90er Jahre durch die Veröffentlichungen anderer Mathematiker verbreitet.

Mehr als jeder andere entwickelte Weierstraß die logischen Grundlagen der Variationsrechnung als einer modernen mathematischen Theorie. In seinen Vorlesungen tritt der Unterschied zwischen notwendiger und hinreichender Bedingung erstmals klar in Erscheinung. Sorgfältig spezifizierte er die Stetigkeitseigenschaften, die von den Funktionen und ihren Variationen erfüllt werden müssen. Bei Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen gebrauchte er Sätze über implizite Funktionen, um sicherzustellen, daß der optimierende Bogen in einer entsprechende Familie von Vergleichskurven enthalten ist. Wie wir oben gesehen haben, wurden die traditionellen Methoden der Variationsrechnung zur Bestimmung von schwachen Lösungen oder Extrema herangezogen. Vor den 60er Jahren des vorigen Jahrhunderts pflegten die Mathematiker die präzise Klasse von Vergleichsbögen in einem gegebenen Variati-

[4] Siehe beispielsweise Bolza (1904, 39, 73 - 74).

onsproblem am Anfang einer Untersuchung nicht zu spezifizieren. Es gab keine logische Konzeption im Hinblick auf die Natur dieser Klasse. Der von Lagrange eingeführte δ-Prozeß forderte jedoch, daß sowohl der Vergleichsbogen als auch sein Gefälle in jedem Punkt nur um einen kleinen Betrag von der tatsächlichen Kurve abweichen. Diese Bedingung, die durch die Art der Variation impliziert war, tritt in Formel (12.17b) für die zweite Variation in Erscheinung, wo sowohl $\delta y = w$ und $\delta y' = w'$ kleine Größen sind. Todhunter (1871, 269) hat in seiner Abhandlung über diskontinuierliche Lösungen anscheinend als erster explizit auf diese Beschränkung der Klasse der Vergleichsbögen aufmerksam gemacht: „Wenn wir behaupten, daß die Beziehung (d. h. die Eulersche Gleichung) ein Minimum ergibt, müssen wir berücksichtigen, daß ein Minimum in bezug auf die *zulässigen Variationen* gemeint ist ... unsere Untersuchung ist nicht anwendbar auf solch eine Variation, wie sie beim Übergang von der Zykloide zu einer diskontinuierlichen Lösung erforderlich wäre: bei solch einem Übergang wäre $\delta p[=\delta y']$ nicht immer unendlich klein. Natürlich wäre es möglich, einen solchen Fall speziell zu untersuchen, doch gehört dies sicher nicht zu den üblichen Methoden der Variationsrechnung."[5]

Weierstraß lieferte eine solche Untersuchung, indem er den Begriff einer Lösung durch Einbeziehung einer viel größeren Klasse von Vergleichsbögen verallgemeinerte. Sein Zugang zur Variationsrechnung implizierte eine grundlegende logische Neuorientierung des Gebietes. In der früheren Variationsforschung war der Charakter der mathematischen Gegenstände durch die angewandten Methoden implizit determiniert. Weierstraß dagegen begann mit Objekten, die explizit im Rahmen der Theorie der Funktionen reeller Variabler definiert sind.

Als Folge dieser Bemühungen begannen manche Autoren um 1900, von der „modernen" oder „neuen" Variationsrechnung zu sprechen. Dabei bezogen sie sich auf die Arbeiten von Weierstraß, G. Erdmann, L. Scheeffer und P. Du Bois-Reymond. Ein hervorstechendes Merkmal des neuen Vorgehens war das Bemühen um Strenge, d. h. die Ableitung der Ergebnisse aus den Prinzipien der Theorie reeller Funktion. Ein gutes Beispiel dieser kritischen Auffassung stellt Du Bois-Reymonds (1879) Beweis eines Satzes dar, der heute als das Fundamentallemma der Variationsrechnung bekannt ist. Dieses Lemma gibt den informellen Argumenten, mit denen man die Eulersche Bedingung aus Gleichung (12.26) ableitete, eine strenge Basis. In seiner einfachsten Form

[5] Hervorhebung im Original. Es sollte erwähnt werden, daß Todhunter (1861/1961, 3) zehn Jahre früher in bezug auf die zweite Variation en passant beobachtet hatte, daß sowohl δy als auch δp klein sind. Das war jedoch eine isolierte Beobachtung, die er nicht weiter auswertete.

besagt es: Wenn $F(x)$ stetig ist und $\int_a^b F(x)\lambda(x)dx = 0$ für alle zulässigen $\lambda(x)$ gilt, dann folgt daraus $F(x) = 0$ über $[a, b]$.

12.9.2 Die Weierstraßsche Exzeßfunktion[6]

In Abb. 12.4 ist der Bogen (0 1) die Lösung eines gegebenen Variationsproblems, d. h. eine Kurve, die durch die Punkte 0 und 1 geht. Für eine solche Lösung der Eulerschen Gleichung wurde 1900 von A. Kneser der Begriff der „Extremalen" eingeführt, den Weierstraß noch nicht benutzt hat. Punkt 2 liege auf dieser Kurve, 3 sei ein benachbarter Punkt, und man bilde den Bogen (3 2), der die zwei Punkte verbindet. (0 3) sei die Extremalkurve, die 0 und 3 verbindet. Der resultierende Bogen (0 3 2 1) ist ein Vergleichsbogen zur gegebenen Kurve. Das Gefälle des Segments (3 2) wird im allgemeinen um einen endlichen Betrag von demjenigen von (0 1) im Punkt 2 abweichen.

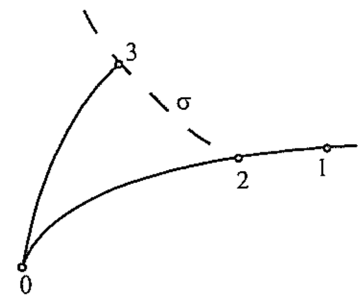

Abbildung 12. 4

[6] In allen seinen Arbeit wandte Weierstraß eine parametrische Methode an, bei der die Variablen x und y als Funktionen eines Parameters t betrachtet werden. Die meisten Mathematiker betrachteten aber x als die unabhängige Variable und y als eine Funktion von x. Obwohl der parametrische Ansatz aus geometrischer Sicht gewisse Vorteile hat, ist seine analytische Entwicklung viel weniger natürlich als die übliche Theorie. In der Zeit von 1895 bis 1905, als die Ideen von Weierstraß einen größeren Bekanntheitsgrad erlangten, verwandten Autoren wie Bolza, Osgood und Goursat einige Mühe darauf, seine Ergebnisse in den Begriffen der üblichen Theorie zu reformulieren. In unserer Darstellung benutzen wir aus Gründen der Übersichtlichkeit die übliche Theorie anstelle der parametrischen. Und da wir uns vor allem für die wesentlichen Ideen von Weierstraß interessieren, lassen wir auch die in den Originalvorlesungen enthaltenen detaillierten analytischen Überlegungen zu den Funktionen einer reellen Variablen außer acht.

Wir bezeichnen mit I_{01} den Wert des gegebenen Integrals längs des Bogens (0 1). Die Koordinaten des Punktes 2 seien (x, y). Es sei σ eine kleine positive Größe, und q das Gefälle des Bogens (3 2). q wird im allgemeinen um einen endlichen Betrag vom Wert y' in 2 abweichen. Es sei $\delta x = -\sigma$ und $\delta y = -\sigma q$. Die Koordinaten des Punktes 3 sind dann $(x + \delta x, y + \delta y)$. Nach der Transversalitätsbedingung (12.4) erhalten wir

$$I_{03} - I_{02} = \frac{\partial f}{\partial y'}(-\sigma q) + \left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)(-\sigma). \qquad (12.45)$$

Für kleine σ gilt

$$I_{32} = f(x,y,q)\sigma. \qquad (12.46)$$

Folglich ist die Variation des Integrals:

$$I_{03} + I_{32} - I_{02} = \left\{ f(x,y,q) - f(x,y,y') - \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,y')(q - y') \right\}\sigma. \qquad (12.47)$$

Diesen Ausdruck benutzte Weierstraß, um eine sogenannte Exzeßfunktion zu definieren:

$$E(x,y,y',q) = f(x,y,q) - f(x,y,y') - \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,y')(q - y'). \qquad (12.48)$$

Mit Hilfe von (12.48) konnte er eine neue notwendige Bedingung einführen, die gültig ist, wenn die Vergleichsfamilie von Bögen um Kurven erweitert wird, deren Gefälle um einen endlichen Betrag von dem der tatsächlichen Kurve abweicht. Damit das gegebene Integral ein Minimum ist, muß für alle Punkte x, y und für alle Werte des Gefälles q

$$E(x,y,y',q) \geq 0 \qquad (12.49)$$

sein. Weierstraß nannte (12.49) die vierte notwendige Bedingung, die die von Euler, Legendre und Jacobi abgeleiteten Bedingungen ergänzte.

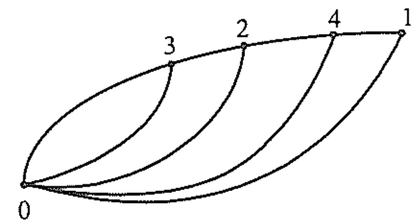

Abbildung 12. 5

Weierstraß zeigte in seinen Vorlesungen, daß eine modifizierte Version von (12.49) für ein Minimum hinreichend ist. Dazu gebrauchte er eine etwas kompliziertere Konstruktion, die jedoch eine natürliche Weiterentwicklung der vorangegangenen Untersuchung war. Wie zuvor sei (0 1) eine Extremale, die die Endpunkte 0 und 1 verbindet (Abb. 12.5). Sie sei analytisch durch $y_0 = y_0(x)$ gegeben. Man betrachte den Vergleichsbogen $y = y(x)$, der in Abb. 12.5. durch die Kurve (0 3 2 4 1) dargestellt ist. 2 und 3 sind Punkte auf dieser Kurve mit den Koordinaten (x,y) beziehungsweise $(x + dx, y + dy)$. Es seien (0 2) und (0 3) Extremalen, die 0 und 2 und 0 und 3 verbinden. Man definiere

$$S(x) = I_{02} + I_{21}, \qquad (12.50)$$

wobei I_{02} das längs der Extremalen (0 2) berechnete Variationsintegral ist und I_{21} der Wert dieses Integrals längs des Segments (2 1) des Vergleichsbogens (0 3 2 4 1). Man hat

$$S(b) = \int_a^b f(x, y_o, y'_o)dx, \qquad (12.51)$$
$$S(a) = \int_a^b f(x, y, y')dx.$$

Dann ist die Variation von I

$$\Delta I = \int_a^b \left(f(x,y,y') - f(x,y_o,y'_o)\right)dx = -\left(S(b) - S(a)\right). \qquad (12.52)$$

Wenn wir zeigen können, daß $S(x)$ eine fallende Funktion von x über $[a, b]$ ist, dann folgt, daß $\Delta I \geq 0$. Wir berechnen deshalb dS/dx und untersuchen die Bedingung $dS/dx \leq 0$. Es ist

$$dS = S(x+dx) - S(x) = I_{03} + I_{32} - I_{02}. \tag{12.53}$$

Es bezeichne $p(x, y)$ das Gefälle der Extremalen (0 2) in dem Punkt 2. Wir nehmen an, daß $p(x, y)$ eine wohldefinierte Funktion der Koordinaten x, y von 2 ist. Aus der Transversalitätsbedingung (12.42) erhalten wir

$$\begin{aligned} I_{03} - I_{02} &= \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,p)dy + \left(f(x,y,p) - p\frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,p) \right)dx \\ &= \left(f(x,y,p) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,p)(y'-p) \right)dx. \end{aligned} \tag{12.54}$$

Ferner

$$I_{32} = f(x,y,y')dx. \tag{12.55}$$

Also

$$\begin{aligned} dS &= -\left(f(x,y,y') - f(x,y,p) - \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,p)(y'-p) \right)dx \\ &= -E(x,y,p,y')dx. \end{aligned} \tag{12.56}$$

Wenn folglich die Bedingung

$$E(x,y,p,y') \geq 0 \tag{12.57}$$

für alle Vergleichsbögen $y = y(x)$ erfüllt ist, dann ist dS/dx immer negativ, und die Lösung $y_0 = y_0(x)$ macht das gegebene Variationsintegral zu einem Minimum.

12.9.3 Der Feldbegriff

Im obigen Beweis nahm Weierstraß an, daß der minimierende Bogen $y_0 = y_0(x)$ in einen „Flächenstreifen" eingebettet ist, der $y_0(x)$ enthält und von einer Familie von Lösungen der Eulerschen Gleichung überdeckt wird. Diese Familie hat die Eigenschaft, daß es ein eindeutiges Element gibt, das den Anfangspunkt 0 und einen beliebigen folgenden Punkt in dem Gebiet verbindet. In seinem *Lehrbuch der Variationsrechnung* von 1900 führte Kneser den Begriff eines „Feldes von Extremalen" ein, um eine solche Familie von Kurven zu bezeichnen. Bei diesem Sprachgebrauch war Kneser offensichtlich vom physikalischen Feldbegriff inspiriert. In Faradays Schriften erstmals aufgetreten und von Maxwell und anderen weiterentwickelt, war der Begriff des Feldes spätestens Ende des Jahrhunderts zu einer Standardidee der theoretischen Physik geworden. Ein Extremalenfeld in der Variationsrechnung ist natürlich ein rein mathematisches Konstrukt und dient als begriffliches Hilfsmittel; die Beziehung zu wirklichen physikalischen Feldern besteht nur in einer Analogie. Lediglich in gewissen Spezialfällen, beispielsweise bei der Bewegung eines Teilchens, die durch eine Zentralkraft bewirkt und durch ein Variationsgesetz bestimmt ist, fallen die möglichen physikalischen Bahnen des Teilchens mit den Extremalen des mathematischen Feldes zusammen; in diesem Fall besitzt der mathematische Begriff eine direkte physikalische Interpretation, obwohl natürlich auch hier die Kraftlinien nicht dasselbe sind wie die Extremalen des Feldes. Im allgemeinen jedoch ist der Feldbegriff der Variationsrechnung abstrakter und steht nur in Analogie zum Konstrukt der Physiker.

12.10 Die Verfeinerung der Weierstraßschen Methoden

12.10.1 Hilberts invariantes Integral

Die Weierstraßschen Methoden erfuhren zwei signifikante Modifikationen durch die nachfolgenden Mathematiker. Die wichtigste war Hilberts Einführung des invarianten Integrals (1900c), um die Herleitung der hinreichenden Bedingung (12.57) zu vereinfachen.[7]

Angenommen, $y_0(x)$ ist eine Lösung der Eulerschen Gleichung, die durch die gegebenen Endpunkte geht. Es sei

$$I = \int_a^b f(x, y_0, y'_0)dx. \tag{12.58}$$

Wir nehmen an, daß $y_0(x)$ so in ein Extremalenfeld eingebettet ist, daß es in jedem Punkt (x, y) eines gewissen Gebietes, das $y_0(x)$ enthält, eine wohlde-

[7] Zu Hilberts Untersuchungen auf dem Gebiet der Variationsrechnung, einschließlich seiner Einführung des invarianten Integrals, siehe Goldstine (1980, 314 - 330).

finierte Funktion $p(x,y)$ gibt, die das Gefälle der eindeutigen Extremalen angibt, welche durch den Anfangspunkt und (x,y) geht. Es sei $y(x)$ ein Vergleichsbogen, der mit $y_0(x)$ in $x=a$ und $x=b$ koinzidiert. $|y(x)-y_0(x)|$ ist klein, aber $|y'(x)-y'_0(x)|$ braucht dies nicht zu sein.

Man betrachte das Integral

$$I^* = \int_a^b \left(f(x,y,p) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,p)(y'-p) \right) dx . \tag{12.59}$$

Hilbert erkannte, daß I^* wegunabhängig ist, d. h., daß sein Wert nicht von der speziellen Funktion $y=y(x)$ abhängt, solange $y=y(x)$ in den Endpunkten mit $y_0(x)$ zusammenfällt. Längs der Kurve $y_0=y_0(x)$ haben wir $y_0'(x)=p(x,y_0(x))$, und damit folgt, daß $I^*=I$. Also ist die Variation ΔI

$$\begin{aligned}\Delta I &= \int_a^b \left(f(x,y,y') - f(x,y_0,y'_0) \right) dx \\ &= \int_a^b \left(f(x,y,y') - f(x,y,p) - \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,p)(y'-p) \right) dx,\end{aligned} \tag{12.60}$$

d. h.

$$\Delta I = \int_a^b E(x,y,p,y')dx . \tag{12.61}$$

Wenn also die Bedingung

$$E(x,y,p(x,y),y') \geq 0 \tag{12.62}$$

für alle Vergleichsbögen $y=y(x)$ erfüllt ist, dann folgt, daß die Lösung $y_0(x)$ das gegebene Variationsintegral zu einem Minimum macht.

Der Schlüssel zu Hilberts Ableitung lag in der Einsicht, daß I^* invariant ist. Wir schreiben den Integranden von (12.59) in der Form

$$\begin{aligned}&\left(f(x,y,p) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,p)(y'-p) \right) dx \\ &= \left(f(x,y,p) - p\frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,p) \right) dx + \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,p)dy.\end{aligned} \tag{12.63}$$

Hilbert stellte fest, daß die Bedingung der exakten Differenzierbarkeit, ausgedrückt mit Hilfe der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x,y,p) - p\frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,p) \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,p) \right), \tag{12.64}$$

äquivalent ist zur Gültigkeit der Eulerschen Gleichung

$$\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'} = 0 \tag{12.65}$$

längs der Kurven des Feldes, für die die Beziehung $dy/dx = p(x,y)$ gilt.

Obwohl Hilbert nicht erklärt, wie er auf die Idee des invarianten Integrals gekommen ist, ist ein naheliegender möglicher Ausgangspunkt in Transversalitätsbedingung zu sehen. Man betrachte das Integral

$$S(x,y) = \int_a^x f(x,y,y')dx , \tag{12.66}$$

wobei vorausgesetzt wird, daß S längs der eindeutigen Extremalen vom Anfangspunkt bis zum Punkt (x,y) berechnet wird. Wir haben $S(b,y_0(b)) = I$. Für $\delta y = dy$ und $\delta x = dx$, erhalten wir aus (12.42) die Beziehung

$$dS = \frac{\partial f}{\partial y'}dy + \left(f - \frac{\partial f}{\partial y'}y' \right) dx . \tag{12.67}$$

In dieser Formel ist die Größe y' in (x,y) gleich dem Gefälle $p(x,y)$ der Extremalen, die durch diesen Punkt geht. Damit dS ein exaktes Differential ist, muß die in (12.64) ausgedrückte Bedingung gelten. Eine Rechnung bestätigt Hilberts Feststellung, daß (12.64) für die Extremale, die durch den Punkt

(x,y) geht, äquivalent ist zur Gültigkeit der Eulerschen Gleichung in diesem Punkt.

Wir schreiben dS nunmehr in der Form

$$dS = \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy}{dx} + f - \frac{\partial f}{\partial y'}p\right)dx, \tag{12.68}$$

$$dS = \left(f(x,y,p) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,p)(y'-p)\right)dx. \tag{12.69}$$

Hier bezeichnet y' das Gefälle des Vergleichsbogens $y = y(x)$ in (x,y). Das von a bis b berechnete Variationsintegral ist daher durch die Formel

$$S(b,y_0(b)) = \int_a^b \left(f(x,y,p) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,p)(y'-p)\right)dx \tag{12.70}$$

gegeben. Die linke Seite von (12.70) ist gleich I, und die rechte Seite ist gleich I^*. Folglich haben wir bewiesen, daß I^* invariant ist.

Diese Ableitung basiert auf zwei Ideen. Die erste ist die Transversalitätsbedingung. Die zweite besteht darin, das Integral S als eine Funktion der Variablen x und y zu betrachten. Letztere hat eine ganz natürliche Basis in Hamiltons Konzeption einer Prinzipalfunktion (vgl. Abschnitt 12.12) Beltramis Erfindung des invarianten Intgrals im Jahre 1868 stand, wie in Thiele (1996) diskutiert, mit seinem Interesse an der Hamilton-Jacobischen Theorie in Verbindung. Auch Hilbert hat bei seiner Diskussion des invarianten Integrals in seinem Pariser Vortrag auf die Hamilton-Jacobischen Gleichungen und auf Knesers diesbezügliche Untersuchungen aufmerksam gemacht. Es stellt sich daher die Frage nach dem Platz der Hamilton-Jacobischen Theorie in Hilberts eigenen Untersuchungen. Bei einer Durchsicht von Hilberts Vorlesungen ab ca. 1900 fand Thiele (persönliche Mitteilung an den Verfasser; siehe auch dess. (1996)) keinen Hinweis auf ein bei Hilbert bestehendes Interesse an der Hamilton-Jacobischen Theorie. Hilbert scheinen vor allem die Zusammenhänge zwischen der Variationsrechnung und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen interessiert zu haben. 1906 hat Hilbert dann eine Arbeit veröffentlicht, in der er sein Resultat bezüglich des invarianten Integrals auf die Hamilton-Jacobische Theorie angewandt hat.

12.10.2 Die moderne Sicht

Bei der Herleitung der notwendigen Bedingung (12.49) betrachtete Weierstraß den Bogen (0 3) (Abb. 12.4) als Extremale, d. h. als Lösung der Eulerschen Gleichung. Da der Punkt 3 verschieden von 2 sein muß, forderte er, daß es längs des Bogens (0 1) keinen zu 0 konjugierten Punkt gibt. Damit die gegebene Konstruktion ausgeführt werden kann, muß folglich die Jacobische Bedingung gelten.

Spätere Autoren, angefangen bei Goursat, gaben dann die Forderung, der benachbarte Bogen (0 3) sei eine Extremale, auf. Es wird nur gebraucht, daß er auf irgend eine bestimmte Weise gegeben ist. In modernen Lehrbüchern wird die Weierstraßsche notwendige Bedingung auf diese Weise hergeleitet. Heute ist sie als die zweite notwendige Bedingung bekannt, während die erste die Eulersche ist und die dritte und vierte die Legendresche und die Jacobische. Der Grund für diese Umstellung der ursprünglichen historischen Reihenfolge liegt darin, daß Legendres Bedingung von der Weierstraßschen abgeleitet werden kann, wenn bestimmte Stetigkeitsvoraussetzungen erfüllt sind.

Nichtsdestoweniger muß angemerkt werden, daß in Weierstraß' Herleitung die Jacobische Bedingung der Forderung (12.49) logisch vorausgeht. Demgemäß war in der ursprünglichen Weierstraßschen Theorie der Feldbegriff bei der Herleitung der notwendigen Bedingung, die von der Exzeß-Funktion Gebrauch macht, schon stillschweigend vorausgesetzt. Es gab daher einen inneren Zusammenhang zwischen seiner Ableitung dieser Bedingung und der komplizierten Analyse, die erforderlich ist, um zu beweisen, daß sie auch hinreichend ist. In der modernen Auffassung des Gebietes ist diese Einheit nicht mehr vorhanden. Die Weierstraßsche notwendige Bedingung wird hergeleitet, ohne Vergleichsextremalen heranzuziehen, und seine hinreichende Bedingung erhält man auf die oben beschriebene Weise durch das Hilbertsche invariante Integral.[8]

Mit Ausnahme des grundlegenden Falles $\int_a^b f(x,y,y')dx \to$ max./min. formulieren moderne Lehrbücher bei der Untersuchung hinreichender Lösungsbedingungen das allgemeine Variationsproblem meist als ein Lagrange-Problem. In der modernen Theorie wird man vergeblich nach einer Darstellung des traditionellen Falles $\int_a^b f(x,y,y',y'')dx \to$ max./min. suchen, der so detailliert von Euler, Jacobi und Hesse behandelt worden ist. Stattdessen werden

[8] In seinen „Vorlesungen" von 1904 stellte Bolza sowohl die ursprüngliche Weierstraßsche Herleitung der hinreichenden Bedingung (12.57) als auch die spätere Demonstration dar, die das Hilbertsche invariante Integral einbezieht. In der überarbeiteten Ausgabe der „Vorlesungen" von 1909 ist nur die zweite Demonstration verblieben.

diese Fälle als Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen aufgefaßt und unter die allgemeine und etwas dunkle Theorie für das Lagrange-Problem subsumiert. Als Ergebnis dieser Situation gibt es einen gewissen Kontrast zwischen dem elementaren Fall $n=1$ und der allgemeinen Theorie.

12.11 Variationsmethoden in der Mechanik

In ihrer ganzen Geschichte war die Variationsrechnung eng mit der theoretischen Mechanik verknüpft. Statik und Dynamik lieferten Beispiele für die mathematische Theorie, und diese wiederum hat sich im Zusammenhang mit physikalischen Fragestellungen entwickelt. Um diese historische Wechselwirkung zu verstehen, wollen wir kurz die Arbeiten von Lagrange, Hamilton und Jacobi zur Dynamik untersuchen. Lagranges *Mécanique analytique* von 1788 war ein umfassendes Lehrbuch der Statik und Dynamik, das auf einer allgemeinen Fassung des Prinzips der virtuellen Arbeit beruhte. Dieses Prinzip wurde mit Hilfe des δ-Formalismus ausgedrückt und angewandt. Lagranges große technische Leistung bestand in der Ableitung der „Lagrangeschen" Form der Differentialgleichungen der Bewegung

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial V}{\partial q_i}, \tag{12.74}$$

für ein System mit n Freiheitsgraden und verallgemeinerten Koordinaten q_i für $i=1,\ldots,n$. Die Größen T und V sind skalare Funktionen, die später als kinetische und potentielle Energie des Systems bezeichnet wurden. Die Vorzüge dieser Gleichungen sind allgemein bekannt: ihre Anwendbarkeit auf eine Vielzahl physikalischer Systeme; die Freiheit, geeignete Koordinatensysteme zu wählen, die Eliminierung der Zwangskräfte sowie ihre Einfachheit und Eleganz. Zusätzlich zu den wirkungsvollen neuen Untersuchungsmethoden bot Lagrange auch eine Diskussion der verschiedenen Prinzipien der Mechanik.

Die *Mécanique analytique* wurde eine wichtige Quelle der Inspiration für Hamilton und Jacobi. In den frühen 30er Jahren des 19. Jahrhunderts kam Hamilton bei der Untersuchung von Problemen der Teilchendynamik auf die Idee, ein gewisses Integral als eine Funktion des Anfangs- und Endwertes der Koordinaten zu betrachten. Er konnte zeigen, daß das auf diese Weise betrachtete Integral - die sogenannte Prinzipalfunktion - zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung erfüllt.

Hamiltons Theorie war ein sehr origineller und fruchtbarer Beitrag zur formalen Entwicklung der Dynamik. Er selbst sprach 1834 in einem Brief an seinen Freund William Whewell davon, daß er „die Mechanik revolutioniert habe" (Hankins 1980, XVIII). Hamilton hatte das große Glück, in Jacobi einen Leser zu finden, der sofort die Bedeutung seiner Arbeit erkannte und selbst ebenfalls ein außergewöhnlicher Mathematiker war. Jacobi griff Hamiltons „schöne Idee" auf und entwickelte eine überarbeitete, verbesserte Theorie. Während Hamilton die Erhaltung der mechanischen Energie (der „lebendigen Kräfte") gefordert hatte, stellte Jacobi fest, daß seine Gleichung ohne eine solche Voraussetzung abgeleitet werden kann. Ferner betonte Jacobi das Integrationsproblem und benutzte die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, um eine Lösung der gewöhnlichen dynamischen Differentialgleichungen in Abhängigkeit von der Lösung der entsprechenden Hamilton-Jacobischen Gleichung zu gewinnen.

Jacobi beschränkte seine Untersuchung auf das Hauptproblem der analytischen Mechanik. 1858 nutzte Clebsch in seiner mathematischen Untersuchung der zweiten Variation einige Ideen der Hamilton-Jacobischen Theorie. Dabei gelang ihm eine einfache und allgemeine Darlegung der Jacobischen Herleitung der Hamilton-Jacobischen Gleichung. Mayer faßte in seiner einige Jahre später durchgeführten Untersuchung der zweiten Variation (siehe 12.6) ebenfalls einige der wesentlichen Ideen der Hamilton-Jacobischen Theorie zusammen. In den Schriften von Clebsch und Mayer wurde diese Theorie als mathematischer Gegenstand entwickelt, der im großen und ganzen unabhängig von der Mechanik ist.

Eine historische Darstellung der Hamilton-Jacobischen Theorie ginge über den Rahmen des vorliegenden Buches hinaus. Es sollte nicht unerwähnt bleiben, auf welche Weise der spätere Begriff des Extremalenfeldes in der Hamilton-Jacobischen Entwicklung implizit enthalten ist. In Clebschs Herleitung der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung wird vorausgesetzt, daß das gegebene Gebiet der x-y-Ebene von einer Familie von Kurven bedeckt ist, die Lösungen der Eulerschen Differentialgleichung sind; es wird ebenfalls implizit vorausgesetzt, daß es abhängig vom Anfangspunkt eine eindeutige Lösung in dem Gebiet gibt. Das Gefälle der Extremalen in jedem Punkt bedingt eine Feldfunktion, die in dem Gebiet wohldefiniert ist. Die Urform dieser Idee kann bis in Hamiltons ursprüngliche Herleitung seiner Prinzipalfunktion in seiner Schrift von 1834 (und noch früher in seinen Entwürfen) zurückverfolgt werden. Hamilton beschäftigte sich mit einem Problem der Dynamik und faßte sein Resultat nicht als ein Ergebnis der Variationsrechnung. Beispielsweise erforderte ein Schritt in seiner Herleitung der Hamilton-Jacobischen Gleichung, daß die von dem System verfolgte Trajektorie mithilfe der dynamischen Bewegungsgleichungen in kanonischen Koordinaten beschrieben wird. Als ein reines Problem der Variationsrechnung betrachtet, besagt dies, daß die Eulersche Variationsgleichung gilt und die gegebene Bahn eine Extremale ist.

Das in den späteren Jahren des 19. Jahrhunderts bestehende Interesse an der Hamilton-Jacobischen Theorie gründete sich anscheinend hauptsächlich auf ihre Rolle bei der Integration der Differentialgleichungen der Variationsrechnung. Clebsch und Mayer wandten bei ihrer Untersuchung der zweiten Variation eine spezielle Integration der Eulerschen Gleichungen in Abhängigkeit von den kanonischen Konstanten an. In mechanischen Untersuchungen konzentrierten sich die Bemühungen auf die Frage der Transformation der Koordinaten eines Systems, um Koordinaten zu erhalten, die eine leicht zu handhabende Lösung des Integrationsproblems boten.

Weierstraß scheint seine Untersuchungen auf dem Gebiet der Variationsrechnung einschließlich seiner Entwicklung der Feldmethoden größtenteils ohne ein besonderes Interesse an der Hamilton-Jacobischen Theorie durchgeführt zu haben. Obwohl einige Arbeiten von Beltrami mit dieser Theorie direkt in Zusammenhang standen, hat er anscheinend keinen großen Einfluß auf die hauptsächlich in Deutschland stattfindende Entwicklung des Gebietes ausgeübt. Knesers „Lehrbuch der Variationsrechnung" von 1900 war die erste größere Abhandlung, in der sowohl die Feldmethoden als auch die Hamilton-Jacobische Theorie dargestellt wurden. Später hat dann Carathéodory (1935) den Zusammenhang zwischen der Variationsrechnung, der Hamilton-Jacobischen Theorie und der Theorie der partiellen Differentialgleichungen systematisch untersucht.

12.12 Existenzfragen

Obwohl wir uns in diesem Überblick auf Variationsprobleme mit einfachem Integral konzentriert haben, erstreckt sich die Theorie in natürlicher Weise auf Probleme mit mehr als einer unabhängigen Veränderlichen. Es sei $u = u(x, y)$ und $p = \partial u/\partial x$, $q = \partial u/\partial y$. Angenommen, wir stehen vor dem Problem, das Integral

$$\iint_R f(x, y, p, q)\,dxdy \tag{12.75}$$

zu maximieren oder minimieren, wobei R ein Gebiet der x-y--Ebene ist und u einen vorgegebenen Wert auf dem Rand C von R annehmen soll. Die Lösung u muß die Eulersche Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q} = 0 \tag{12.76}$$

erfüllen.

Man nehme beispielsweise an, daß

$$f = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = p^2 + q^2 . \tag{12.77}$$

Dann reduziert sich die Eulersche Gleichung auf die Potential- oder Laplacesche Gleichung für die Funktion u:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 . \tag{12.78}$$

Im 19. Jahrhundert stieß man bei verschiedenen Fragen der Potentialtheorie und der komplexen Funktionentheorie (vgl. Kap. 6 und 7) auf das Problem, eine Funktion zu finden, die die Laplacesche partielle Differentialgleichung in einem gegebenen Gebiet erfüllt und auf dem Rand vorgegebene Werte annimmt. George Green, William Thomson und Peter Lejeune Dirichlet in der Potentialtheorie und Bernhard Riemann in der komplexe Funktionentheorie leiteten die Existenz einer solchen Funktion aus der Tatsache ab, daß sie die Lösung eines wohldefinierten Problems der Variationsrechnung wäre. Auf diese Weise wurde die Variationsrechnung zum Garanten für die Existenz einer Funktion, die in einem anderen Teil der Analysis gebraucht wurde. Diese Schlußweise erhielt von Riemann den Namen „Dirichletsches Prinzip".[9]

1870 erkannte Weierstraß, daß dieses Problem nicht immer eine Lösung hat.[10] Er betrachtete das Beispiel

$$\int_{-1}^{1} x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx , \tag{12.79}$$

wobei vorausgesetzt wird, daß die Werte von y bei $x = -1$ und $x = +1$ verschieden sind. Er zeigte, daß der Minimalwert Null niemals wirklich erreicht

[9] Zur Geschichte des Dirichletschen Prinzips siehe Kline (1972, 658 - 660, 682 - 687, 704 - 705), Monna (1975), Bottazzini (1986, 295 - 303) und Renteln 1996.

[10] Dieses Beispiel wird in Bottazzini (1986, 300 - 301) beschrieben.

wird, obwohl es möglich ist, zulässige $y = y(x)$ zu finden, die das Integral beliebig klein machen.

Das Weierstraßsche Resultat zog die Gültigkeit des Dirichletschen Prinzips als einer apriorischen Methode der Analysis in Zweifel, und für eine Zeit geriet das Prinzip in Verruf. In seinem Pariser Vortrag von 1900 forderte Hilbert im 20. Problem die weitere Untersuchung der Existenzfragen in der Variationsrechnung. In Aufsätzen, die zwischen 1901 und 1906 erschienen sind (siehe Monna 1975, 132) ließ er das Dirichletsche Prinzip wieder aufleben, indem er zeigte, daß das Variationsproblem unter bestimmten speziellen Bedingungen immer eine Lösung hat. Um dieses Ergebnis abzusichern, wandte er eine sogenannte „direkte“ Methode an: anstatt die Eulersche Differentialgleichung abzuleiten und zu versuchen, ein Integral dieser Gleichung zu erhalten, zeigt man direkt mit einem passenden Grenzübergang, daß eine Lösung des ursprünglichen Variationsproblems existiert. Hilberts Untersuchung initiierte ein Forschungsprogramm in der Variationsrechnung des 20. Jahrhunderts, in dem Fragen der Existenz eine herausragende Rolle gespielt haben.[11]

[11] Einen Überblick über diese Entwicklung gibt Hildebrandt (1989).

13 Die Entstehung der Funktionalanalysis

Reinhard Siegmund-Schultze

13.1 Einführung

Dem Wesen nach war die Entstehung der Funktionalanalysis eine Übertragung einzelner oder mehrerer Begriffe wie Kompaktheit, Beschränktheit, Konvergenz, Abstand, Stetigkeit, Vollständigkeit, Dimension, Skalarprodukt, Linearität usw. vom n-dimensionalen euklidischen Raum $\boldsymbol{R}^n$ und den auf ihm erklärten Funktionen auf unendlichdimensionale „Funktionenräume“ verschiedenen Typs und ihre „Operatoren“.

Hierzu war ein „Übergang vom Endlichen zum Unendlichen“ erforderlich, dessen konkrete Gestalt Gegenstand der Bemühungen und auch des Streits der frühen „Funktionalanalytiker“ war. Vielfach wurden erst durch die Verallgemeinerung, durch die in der Tendenz axiomatische Definition der neuen Räume, in die sich der $\boldsymbol{R}^n$ als Spezialfall einordnete, das Verhältnis der ursprünglichen Begriffe, ihre partielle logische Abhängigkeit oder ihre Unabhängigkeit erkennbar. Begriffe wie der der Konvergenz diversifizierten sich, ehemals äquivalente Eigenschaften wie Beschränktheit und Kompaktheit fielen auseinander. Hinzu traten neue Grundprinzipien und Begriffe, die im Endlichen keinen Sinn besaßen (Hahn-Banachscher Fortsetzungssatz, Kategorientheorem, Separabilität) und nur mit Hilfe der Cantorschen Mengenlehre eingeführt werden konnten.

Wichtige Brücken des „Übergangs vom Endlichen zum Unendlichen“ waren die verallgemeinerte geometrische Anschauung und Sprechweise (z.B. mit Hilfe des „Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens“), der Analogiegedanke zur linearen Algebra und zur Theorie der reellen Funktionen sowie die Übernahme von Approximations-und Iterationsprinzipien (z.B. „Neumannsche Reihe“).