Ecuaciones diferenciales en la teoría de perturbaciones planetarias de Lagrange

Craig G. Fraser

Introducción

El primer trabajo realizado por Lagrange en matemáticas, efectuado durante la década de 1750 y principios de la de 1760, se centró en el cálculo de variaciones y en la mecánica. Desde 1764 empezó a trabajar intensamente en las cuestiones teóricas de la astronomía física, nombre con que se le conocía entonces. Se trataba de un tema al que dedicaría gran parte de sus investigaciones en los siguientes veinte años. Su principal aportación al tema, hecha mientras era director de matemáticas en la Academia de Berlín y publicada en las memorias de esa institución, constaba de técnicas y resultados en la teoría de las perturbaciones. Ideó un método para investigar el movimiento de un planeta determinado que girase alrededor del Sol y que estuviera sujeto a una fuerza de perturbación procedente de un tercer cuerpo. Los principales objetos de interés fueron los sistemas Sol-Tierra-Luna y Sol-Júpiter-Saturno, y el problema consistía en explicar algunas anomalías de sus movimientos. Entre los problemas destacaba la desigualdad "grande" o "larga" en los periodos de Júpiter y Saturno, descubierta por los astrónomos al comparar las observaciones efectuadas a lo largo de siglos.

Lagrange se dedicó a sus investigaciones más importantes sobre las perturbaciones en el periodo comprendido entre 1775 y 1784. El otro gran investigador de la época era Laplace, quien había empezado a trabajar sobre el mismo tema en París a principios de la década de 1770. En 1785 terminó una memoria que contenía la explicación definitiva de la gran desigualdad de Júpiter y Saturno. Para conseguir su resultado, un enorme logro de la astronomía matemática, utilizó técnicas e ideas para las que

Mathesis 7 (1991) 339-350

Lagrange había abierto el camino, pero llevándolas un paso más lejos. Desde el punto de vista histórico, podría decirse que la teoría clásica de la estabilidad planetaria fue el logro conjunto de los dos hombres.

La aportación de Lagrange al estudio de las perturbaciones fue el método de variación de parámetros y el concepto asociado de función perturbadora. Al tiempo que llevaba a cabo este trabajo también se ocupaba del estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Esta investigación se refería a su utilización tan éxitosa y original de la idea de variar las constantes arbitrarias que aparecían en su solución. Parece evidente cierta clase de nexo entre su investigación en astronomía planetaria y su teoría de las ecuaciones diferenciales, y de hecho así se ha señalado en las obras sobre el tema.[1] Sin embargo, hasta hoy no se dispone de un estudio comparativo del contenido de esas investigaciones ni de las circunstancias exactas en que se llevaron a cabo. Este trabajo tiene por objeto dar inicio a dichos estudios.

Preludio historiográfico

La mecánica celeste del siglo XVIII no tenía el interés intelectual general que presenció el nacimiento de la astronomía heliocéntrica durante la Revolución Científica. Las memorias de Euler, Lagrange y Laplace son obras en vías de realización, intentos prolongados, provisionales y sumamente técnicos de analizar las irregularidades observadas en el movimiento de los planetas. A menudo se hace un gran esfuerzo en el desarrollo de alguna idea o técnica, sin que se obtenga la recompensa correspondiente en términos de los resultados alcanzados. En general, esos estudios carecen de la independencia teórica y de la profundidad de las investigaciones puramente matemáticas efectuadas por los mismos autores.

Aparte de la confusión técnica que caracterizó a su desarrollo inicial, la teoría clásica de las perturbaciones es difícil hoy en día debido a que no estamos familiarizados con ella. A diferencia del cálculo, del ciclo de Carnot o de la tabla periódica de los elementos (temas que son parte de la formación científica del estudiante contemporáneo), la teoría clásica [de perturbaciones] ya no forma parte de los programas de estudios en las universidades. El autor de un artículo histórico reciente sobre la gran desigualdad de Júpiter y de Saturno se vio obligado a recurrir a una descripción de George Airy hecha en 1836, con el fin de ofrecer la correcta explicación científica de este fenómeno.[2] Resulta difícil encontrar un libro publicado en el presente siglo que contenga algo que semeje a la teoría clásica original. En unos apuntes de conferencias publicadas en 1969 escribía Shlomo Sternberg:

> En cierto modo, el trabajo de los astrónomos clásicos en la teoría de las perturbaciones ya no es importante para la predicción del movimiento de los planetas. El surgimiento de la astronomía por radar (y, en cierta medida, de las sondas espaciales) nos ha proporcionado una exactitud en las observaciones que supera con mucho lo que se sabía hasta entonces. Esta información se incorpora a las ecuaciones del movimiento que se integran numéricamente en una computadora de gran velocidad, en tanto que las constantes numéricas son reajustadas en forma constante para que se acomoden a los datos. Este trabajo ... permite a la computadora predecir las posiciones de los planetas con una precisión mucho mayor (por simple procesamiento de los datos) que la que se consigue aplicando la teoría clásica de las perturbaciones. En un sentido muy real, uno de los logros más trascendentes del hombre ... ha pasado al dominio de la máquina.[3]

Por último, conviene señalar que cuando hoy se aborda el tema de las perturbaciones, suele hacerse como si se tratara de un tema de análisis avanzado que incluye nociones de topología y de geometría diferencial.

Así pues, la historia de la astronomía física impone especiales demandas expositivas al historiador de la ciencia. La necesidad de contar con un relato de esta historia se hace evidente ante la prominente posición que ocupa la astronomía en las investigaciones físicas del siglo XVIII. Basta echar un vistazo a las memorias de París para percatarse del enorme interés por el tema, como igual lo indica la atención que se le da en las recopilaciones de las obras completas de los principales científicos de la época. La astronomía planetaria era la única ciencia matemática en el periodo anterior a 1800 que se desarrolló a través de la interacción sistemática entre observación y teoría.

Teoría de perturbaciones

En la siguiente exposición nos concentraremos en las innovaciones básicas logradas en la teoría de perturbaciones, más que en cómo las innovaciones sirvieron para explicar la observación. Las principales memorias en el desarrollo histórico de las aportaciones de Lagrange al tema son:

I) Las memorias de Euler ([1748] y [1749]) de 1747-1748 que contienen su deducción de las ecuaciones diferenciales del movimiento de los planetas y su introducción del método de la variación de constantes al análisis del sistema Sol-Júpiter-Saturno.

II) Las memorias de Lagrange ([1766] y [1777a]) de 1766 que contienen su estudio de los satélites de Júpiter y del sistema Sol-Júpiter-Saturno. Aquí sigue el planteamiento inicial de Euler.
III) La memoria de Lagrange ([1779]) de 1776 sobre la alteración de los movimientos medios de los planetas, que incluye su presentación del método de variación de constantes y la función perturbadora.

El trabajo efectuado por Euler en la década de 1740, lo mismo que el de Clairaut y el de d'Alembert, se ocupa de la deducción de las ecuaciones diferenciales del movimiento de los planetas. Por esa época apareció la forma analítica de lo que hoy se conoce con el nombre de segunda ley de Newton y se usó para analizar el movimiento descrito desde sistemas de coordenadas cartesianas o polares. La cuestión central de la astronomía planetaria era si la teoría gravitacional de Newton, y en particular la ley del inverso del cuadrado, era suficiente para "salvar" los fenómenos, o si había que modificarla o completarla con la suposición de otras entidades perturbadoras además de la interacción gravitacional mutua. En este sentido, toda la historia de la teoría de las perturbaciones en el siglo XVIII puede considerarse como la reivindicación sucesiva y definitiva de la hipótesis newtoniana.

El problema del movimiento de un solo planeta alrededor del Sol se resolvió completamente para una ley de fuerza del inverso del cuadrado y se demostró que implicaba una órbita elíptica en uno de cuyos focos se suponía que se encontraba el Sol. La posición del planeta se daba en términos de seis constantes arbitrarias: dos constantes que especificaban el plano de la órbita planetaria respecto a un plano fijo de referencia (la inclinación y la línea de nodos, es decir, la línea de intersección de los dos planos); dos constantes que daban el tamaño y la forma de la elipse (el semi-eje mayor y la excentricidad); una constante que determinaba la dirección del eje principal (línea de ápsides), y una constante que daba la posición del planeta en algún momento inicial fijo (posición en la época).

En la primera memoria de 1748 Euler dedujo las ecuaciones diferenciales del movimiento para un cuerpo puntual sobre el que actúa una fuerza cualquiera. Se sirvió de un sistema de coordenadas cilíndricas. La posición del cuerpo está dada por las coordenadas r, ϕ y z, donde r y ϕ son las coordenadas polares en el plano de referencia base de la proyección del cuerpo sobre este plano. Y z es la distancia perpendicular del cuerpo respecto del plano. Euler obtiene las tres ecuaciones (un poco simplificadas):

$$ddr - rd\phi^2 + Pdt^2 = 0 \qquad (1)$$
$$2drd\phi + rdd\phi + Qdt^2 \qquad (2)$$
$$ddz + Rdt^2 = 0 \qquad (3)$$

donde P, Q y R son los componentes de la fuerza correspondientes a r, ϕ y z.

En determinado instante es preciso considerar el plano donde está moviéndose el cuerpo. Ese plano contiene el elemento diferencial de longitud de trayectoria y el origen. Tiene una inclinación ρ respecto del plano de referencia y lo interseca en la línea de nodos, línea que está dada por el ángulo π en el sistema polar de referencia. Usando geometría elemental tenemos la relación

$$z = r\,sen\,(\phi - \pi)\,tan\rho \qquad (4)$$

Euler calcula el diferencial de z en términos de dr, $d\phi$, $d\pi$ y $d\rho$:

$$dz = dr\,sen\,(\phi - \pi)\,tan\rho + r\,(d\phi - d\pi)\,cos\,(\phi - \pi)\,tan\rho + rd\rho\,sen\,(\phi - \pi)\,/\,cos^2\rho \qquad (5)$$

Supone asimismo que las cantidades π y ρ están cambiando con mucha lentitud. Así, en el instante dado podemos suponer que el cambio de z producido por $d\pi$ y $d\rho$ es infinitesimal respecto de dz, dr y $d\phi$. Por tanto, obtenemos las dos ecuaciones diferenciales:

$$dz = dr\,sen(\phi - \pi)\,\,tan\rho + rd\phi cos\,(\phi - \pi)\,tan\rho \qquad (6)$$

$$rd\pi cos\,(\phi - \pi)\,tan\rho - rd\rho sen\,(\phi - \pi)\,/\,cos^2\rho = 0 \qquad (7)$$

Lagrange pasa luego a calcular el segundo diferencial ddz a partir de (6), usa (7) para relacionar $d\pi$ y $d\rho$ y después los sustituye en la ecuación de fuerza (3) para conseguir

$$d\pi = [dt^2 sen(\phi - \pi)/\,rd\phi]\,(P sen(\phi - \pi) + Q cos\,(\phi - \pi) - R/tan\rho) \qquad (8)$$

Finalmente, con base en (7) deduce la ecuación

$$dlogtan\rho = [dt^2 cos(\phi - \pi)\,/\,rd\rho]\,(P sen\,(\phi - \pi) + Q cos\,(\phi - \pi) - R/tan\rho) \qquad (9)$$

Las ecuaciones (1), (2), (8) y (9) son las ecuaciones diferenciales utilizadas por Euler para analizar el movimiento perturbado de un cuerpo que forma parte de un sistema constituido por tres cuerpos. En la segunda memoria de 1748 recurre a un método semejante para analizar el movimiento de Saturno y Júpiter, y en los años siguientes utilizaría reiteradamente tales métodos para investigar el movimiento lunar. Todas sus investigaciones sobre teoría de perturbaciones se basan en la idea que acabamos de describir.

El método con que Euler modifica las constantes orbitales es una extensión bastante natural del problema de dos cuerpos planteado por Kepler. Su idea se funda en una innovación técnica específica sin que intervenga una revaloración teórica del problema del movimiento perturbado. Nótese que en su procedimiento las fuerzas de perturbación no están relacionadas en una forma analítica directa con la variación de los elementos.

Cuando Lagrange emprendió el estudio de las perturbaciones de los planetas en 1766, adoptó el método de Euler y escribió dos memorias en que lo aplicó. Diez años más tarde, en 1776, retomó el tema con un ensayo sobre movimientos planetarios medios. En él expuso por primera ocasión su principal aportación a la teoría de las perturbaciones. Ideó un nuevo y fundamental planteamiento analítico en el cual la cuestión del movimiento perturbado era tratada desde un punto de vista muy general como un problema en la teoría de ecuaciones diferenciales.

Comienza la memoria con las ecuaciones de movimiento para un cuerpo

$$F / r^2$$

sobre el cual actúa una fuerza de cuadrado inverso de magnitud F / r^2 dirigida hacia el origen y también una segunda fuerza perturbadora desconocida X, Y, Z:

$$d^2x/dt^2 + F_x/r^3 + X = 0 \qquad (1)$$
$$d^2y/dt^2 + F_y/r^3 + Y = 0 \qquad (2)$$
$$d^2z/dt^2 + F_z/r^3 + Z = 0 \qquad (3)$$

Antes de proseguir la explicación de estas ecuaciones, examina el correspondiente sistema "homogéneo":

$$d^2z/dt^2 + F_x/r^3 = 0 \qquad (4)$$
$$d^2y/dt^2 + F_y/r^3 = 0 \qquad (5)$$

$$d^2z/dt^2 + F_z/r^3 = 0 \qquad (6)$$

Las ecuaciones (4), (5) y (6) son válidas para el movimiento kepleriano (el problema de dos cuerpos) y puede resolverse completamente para x, y y z en términos del tiempo t y seis constantes arbitrarias:

$$x = f(a_1,\dots, a_6, t) \qquad (7)$$
$$y = g(a_1,\dots, a_6, t) \qquad (8)$$
$$z = h(a_1,\dots, a_6, t) \qquad (9)$$

Lagrange toma ahora estas integrales y las deriva respecto del tiempo, obteniendo así tres ecuaciones más que contienen a las constantes arbitrarias. Sirviéndose de las seis ecuaciones resultantes expresa cada una de las constantes en términos de x, y y z y de las derivadas respecto del tiempo dx/dt, dy/dt y dz/dt. Supóngase que

$$V(x, y, z, dx/dt, dy/dt, dz/dt) = k \qquad (10)$$

sea una de esas expresiones para la constante k. Lagrange señala que si derivamos (10) respecto del tiempo, obtendremos una ecuación que contiene a x, y y z y a sus primera y segunda derivadas:

$$dV / dt = 0 \qquad (11)$$

Puesto que (10) también se obtuvo a partir de los sistemas (4), (5) y (6), la ecuación (11) también deberá ser equivalente a este sistema. Por tanto, si reemplazamos las segundas derivadas en (11) con las fuerzas correspondientes dadas por (4), (5) y (6) obtendremos una identidad en el miembro izquierdo (11) que se cancela dando cero.

Lagrange propone a continuación sustituir las segundas derivadas en dV/dt por las fuerzas presentes en el sistema original perturbado (1), (2) y (3). La parte de estas fuerzas que aparece en (4), (5) y (6) conduce a una identidad en la expresión para dV/dt que se cancela y nos da cero. En consecuencia, dV/dt se reduce a

$$-([\partial V/\partial[dx/dt]]\, X + [\partial V/\partial[dy/dt]]\, Y + [\partial V/\partial[dz/dt]]\, Z)$$

Dado que ahora estamos considerando el movimiento perturbado, las constantes arbitrarias variarán con el tiempo. Obtenemos, pues, la ecuación

$$-[(\partial V/\partial[dx/dt]]\, X + [\partial V/\partial[dy/dt]]\, Y + [\partial V/\partial[dz/dt]]\, Z)dt = dk \qquad (12)$$

La ecuación (12), que nos da la variación de la constante arbitraria en términos de la fuerza de perturbación que actúa sobre el cuerpo, es la relación fundamental en la teoría de Lagrange. En los casos que considera, donde las fuerzas perturbadoras nacen de la acción gravitacional de terceros cuerpos, el miembro derecho (12) toma la forma

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

que es una diferencial exacta. Su integral Ω es una expresión que en la mecánica celeste de épocas posteriores llegó a conocerse con el nombre de función perturbadora del sistema. El problema físico del movimiento gravitacionalmente perturbado se redujo, gracias a la teoría de Lagrange, al estudio matemático de esta función.

Una vez introducidos estos procedimientos, Lagrange prosigue en su memoria demostrando un interesante resultado en la teoría de la estabilidad planetaria. En el caso de Júpiter y Saturno presenta un argumento general para demostrar que, suponiendo que se hacen ciertas aproximaciones, las variaciones del movimiento medio que surjen de las interacciones gravitacionales mutuas deben ser periódicas y tampoco deben estar sujetas a ningún cambio secular o de incremento progresivo a largo plazo. Este resultado explicaba un descubrimiento reciente de la astronomía observacional, realizado por Johann Heinrich Lambert (colega del propio Lagrange) en la Academia de Berlín, y que sugería que la desigualdad del movimiento de los planetas exteriores era periódica aunque a largo plazo. Sus investigaciones posteriores estarían dedicadas a una investigación exhaustiva de este resultado.

Cuando Laplace recibió la memoria de Lagrange en 1779, le escribió en Berlín y elogió la "afortunada aplicación" de su "hermoso método". Dijo que "la elegancia y simplicidad de tu análisis me ha procurado un placer que no puedo expresar con palabras".[4] Más tarde calificaría de "descubrimiento extraordinario" la introducción de la función perturbadora por parte de Lagrange.

Teoría de Lagrange de las ecuaciones diferenciales

A mediados del decenio de 1770, en el periodo de dos años que precedió inmediatamente a la memoria principal de 1776, Lagrange escribió varios trabajos sobre temas de la teoría de ecuaciones diferenciales.[5] Investigó las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, las soluciones singulares a las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales ordinarias no homogéneas. A pesar de que fueron investigaciones individuales e independientes, en todas ellas utilizó un procedimiento de "variación de constantes".

1) Lagrange [1774] introdujo el concepto de una solución completa para la ecuación parcial de primer orden como una solución que contiene dos constantes arbitrarias; el estudio de tales soluciones en términos de constantes y no de funciones arbitrarias representaba un nuevo enfoque del problema;
2) Lagrange [1776] demostró que las soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales ordinarias pueden obtenerse de la integral general mediante la variación y eliminación de la constante arbitraria que aparece en la integral;
3) Lagrange [1777b] demostró cómo la variación de constantes puede emplearse para deducir una solución particular para una ecuación diferencial líneal ordinaria no homogénea a partir de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente.

El interés de Lagrange en los dos primeros de estos temas parece haber sido ajeno a sus investigaciones que previamente había consagrado a la mecánica celeste; los problemas y métodos en cuestión son claramente independientes desde el punto de vista técnico y conceptual. Lo que sí revelaron estas investigaciones matemáticas fue el valor de desarrollar la teoría en términos generales, y con base en primeros principios y usando la idea de la variación de constantes.

Como se mencionó antes, las ideas de Lagrange sobre la solución de ecuaciones diferenciales datan aproximadamente de los dos años que precedieron su memoria de octubre de 1776 sobre las perturbaciones planetarias. No cabe la menor duda de que el trabajo que por esa época dedicó al análisis puro lo estimuló a reconsiderar teóricamente el problema global del movimiento perturbado. En su trabajo de mayo de 1776, que contenía el método de variación de parámetros, escribe:

> Es obvio que este método ... [será] muy útil para calcular los movimientos de los planetas en la medida en que los altera su acción mutua ... Ya he intentado aplicar este método en las investigaciones que dediqué a la teoría de Júpiter y de Saturno [en 1766]. Lo expongo aquí en una forma más directa y general; pero me propongo desarrollarlo en otras partes con mayor detalle y aplicarlo a la solución de algunos importantes problemas en el sistema del mundo.[6]

Cuando el nuevo método apareció seis meses después, mostraba las características de una teoría general totalmente desarrollada: las ecuaciones de movimiento de los sistemas perturbados y no perturbados se examinaban por separado; se aislaban las constantes arbitrarias como funciones de la posición y la velocidad; la variación de las constantes se formulaba en términos de las fuerzas de perturbación, y se introducía la función perturbadora.

Observaciones finales

La historia aquí reseñada presenta un estudio de la interacción entre las matemáticas y la física en el siglo XVIII. La introducción que en 1748 hizo Euler del método de la variación de constantes constituyó una innovación técnica natural y muy específica en el estudio matemático del problema de los dos cuerpos. El hecho de que, en los años sucesivos, no haya logrado desarrollar o ampliar esta idea en forma significativa indica que se necesitaba una nueva perspectiva para avanzar por este camino. Los métodos basados en el análisis matemático directo del problema físico habían alcanzado una dificultad insuperable.

En cierta medida la buena suerte explica el exitoso desarrollo de los métodos de perturbación por parte de Lagrange. Lo abstracto de la concepción y la originalidad teórica son características de las matemáticas puras que introdujo en estas investigaciones. Sus investigaciones en análisis dieron origen a importantes ideas, ofreciéndole al mismo tiempo cierta generalidad e independencia de juicio que le permitieron abordar el problema físico desde una nueva perspectiva. En un periodo marcado por la influencia de las disciplinas prácticas sobre las matemáticas, su obra muestra que esta influencia fue recíproca y que algunas veces innovaciones trascendentales en física fueron el resultado de la evolución interna de las matemáticas.

Notas

1. Véase por ejemplo [Kline, 1972, 497].
2. [Wilson 1985, 24-36].
3. Sternberg [1969, xvi].
4. Citado en [Wilson 1985, 205].
5. Por los retrasos en la publicación de las memorias académicas durante el siglo XVIII las fechas de publicación no son confiables para reconstruir el carácter de las investigaciones anuales de un individuo. En caso de Lagrange me he servido del *Inventaire chronologique* (1974) de Taton que es un resumen muy completo de su trabajo publicado con las fechas de presentación.
6. Oeuvres de Lagrange IV, 164-165.

Referencias

Airy, G. B. 1834, *Gravitation*, London.

Euler, L. 1749a, "Recherches sur le mouvement de corps célestes en général", *Mémoires de l'Académie de Berlin.* In *Opera Omnia* Ser. 2, V. 25, 1-44.

—— 1749b, "Pièce qui a remporté le prix de l'Académie royale des sciences en 1748 sur les inégalités de mouvement de Saturne et de Jupiter", *Académie royale de Paris.* In Euler's *Opera Omnia* Ser. 2, V. 25, 45-157.

Kline, M. 1972, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, Oxford.

Lagrange, J. L. 1766, "Solutions de différens problèmes de calcul intégral", *Miscellanea Taurinensia* V. 3, 179-380. In *Oeuvres de Lagrange* I, 471-668.

— 1774, "Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre", *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1772*, 353-372. In *Oeuvres de Lagrange* III 549-575.

—— 1776, "Sur les intégrales particulieres des équations différentielles", *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1774*, 197-275. Leer octubre 12 y noviembre 9, 1775. In *Oeuvres de Lagrange* IV, 5-108.

—— 1777a, "Recherches sur les inégalités du mouvement des satellites de Jupiter causées par leur attraction mutuelle", *Recueil de piéces qui ont remporté les Prix de l'Académie royale des Sciences (Paris)*, 6th "piéce", 1-162. La memoria fue recibida el 31 de agosto 1765, y ganó el precio para el año 1766. En *Oeuvres de Lagrange* VI, 65-225.

—— 1777b, "Recherches sur les suites recurrentes dont les termes varient de plusieurs manières différentes...", *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1775*, 183-272. Leer abril 29 y mayo 9, 1776. En *Oeuvres de Lagrange* IV, 151-251.

—— 1779, "Sur l'altération des moyen mouvements des planètes", *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1776/1779*, 199-213. Leer octubre 24, 1776. En *Oeuvres de Lagrange* IV, 255-271.

Moulton, F. R. 1914, *An Introduction to Celestial Mechanics* (1914).

Sternberg, S. 1969, *Celestial Mechanics Part I*, New York, W. A. Benjamin, Inc.

Taton, R. 1974, "Inventaire chronologie de l'oeuvre de Lagrange", *Revue Histoire des Sciences* 27/1, 3-36.

Watson, J. C. 1896, *Theoretical Astronomy Relating to the Motions of the Heavenly Bodies.*

Wilson, C. 1985, "The Great Inequality of Jupiter and Saturn from Kepler to Laplace", *Archive for History of Exact Sciences* 33, 15-290.